

THÈSE

*présentée
pour obtenir le titre de*

**DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE
DE TOULOUSE**

Spécialité : Traitement du signal

par

David BONACCI

**INTÉRÊT DU DÉCOUPAGE EN SOUS-BANDES POUR
L'ANALYSE SPECTRALE**

soutenue le 19 Décembre 2003 devant le jury composé de :

Bernard Lacaze	Professeur à l'INSA de Toulouse	Président
Petar M. Djurić	Professeur à l'Université de Stony-Brook, USA	Rapporteur
Nadine Martin	Directeur de Recherches LIS, Grenoble	Rapporteur
Miguel A. Lagunas	Professeur Univ. Politécnica de Catalunya, Spain	Rapporteur
Corinne Mailhes	Maître de Conférences à l'INP de Toulouse	Examineur
Francis Castanié	Professeur à l'INP de Toulouse	Examineur

Préface

Depuis de nombreuses décennies, l'analyse spectrale est un des axes majeurs du traitement du signal. Les méthodes et les outils associés ont considérablement évolué : initialement basées sur la transformée de Fourier puis reliées à des modélisations paramétriques [1] [2], ces techniques se sont adaptées pour suivre l'évolution de signaux non stationnaires. Sont apparues alors toutes les méthodes temps-fréquence, puis temps-échelles [3] [4]. Ainsi, l'analyse spectrale continue d'intéresser la communauté de recherche en traitement du signal. Témoin en est un des derniers ouvrages parus dans la collection IC2 d'Hermès, intitulé "Analyse Spectrale" [5].

Le groupe Signal et Communications (SC) de l'IRIT a une longue expérience en matière d'analyse spectrale. Plusieurs thèses successives ont soulevé une question liée au couplage de l'analyse spectrale avec le découpage en sous-bandes. Ainsi, Yvetot [6] s'est intéressé à l'analyse modale de signaux électriques induits sur les câbles de liaison d'un système lorsque celui-ci est soumis à une agression électromagnétique (comme l'impulsion électromagnétique d'origine nucléaire). La richesse spectrale des signaux étudiés a conduit Yvetot à proposer une solution combinant le découpage en sous-bandes et une analyse spectrale dans chacune des sous-bandes à base de modélisation de Prony. Ce type de modélisation était particulièrement adapté dans le cadre de cette étude puisque la description attendue des signaux devait être en termes de paramètres modaux (fréquences, amplitudes, ...) ce qu'offre directement la modélisation de Prony.

Une autre thèse [7] a étudié l'estimation de sous-harmoniques à l'aide de méthodes paramétriques. L'application visée concernait l'analyse de signaux courants et vitesses

issus de moteurs électriques dans le but de détecter des composantes très basse fréquence (appelées sous-harmoniques) dont des puissances même très faibles peuvent suffire à détruire les moteurs. Dans le cadre de cette étude, Ducasse s'est intéressé à l'influence de la fréquence d'échantillonnage sur l'estimation des paramètres du modèle paramétrique (Autorégressif (AR) ou Prony). Il a montré que l'estimation est optimale lorsque le barycentre des fréquences est proche de 0.25 en fréquences normalisées. Ceci suggère l'utilisation préalable de filtres permettant de "recentrer" les fréquences d'intérêt autour de 0.25 avant toute analyse paramétrique.

Plus récemment, la thèse de Michel [8] a abordé le problème de la détection de modes vibratoires apparaissant dans des structures souples. Là encore, au vu de la richesse des signaux étudiés, la solution consiste en un découpage en sous-bandes couplé ensuite à une analyse spectrale particulière, basée sur de la modélisation paramétrique sur chacune des branches du banc de filtres.

En plus de ces travaux de thèse, le groupe SC de l'IRIT s'est impliqué dans une action de recherche, opération d'Aide à l'Analyse Spectrale, initialement appelée opération ASPECT dans le cadre du GDR-PRC ISIS. Cette opération [9] a consisté à proposer une démarche originale d'analyse spectrale de signaux stationnaires. Les signaux fournis par les partenaires industriels étaient longs et très riches d'un point de vue spectral. L'opération ASPECT s'est volontairement restreinte à l'étude de méthodes de type Fourier. Toutefois, lors de l'analyse de certains signaux, de part le trop grand nombre de composantes spectrales et le grand nombre de points de signal fournis, une démarche naturelle de découpage en sous-bandes s'est imposée préalablement à l'analyse spectrale.

Enfin, des papiers apparaissant dans la littérature, dont on peut trouver une liste non exhaustive dans la liste des références à la fin de cette thèse, ont fini de nous convaincre de l'intérêt d'une étude sur le couple "découpage en sous-bandes et analyse spectrale".

Avant-propos

Je voudrais remercier de façon générale tous les membre du laboratoire TésA pour ces trois années passées en leur compagnie dans les locaux du 17 bis rue Riquet à TOULOUSE. En particulier, je tiens à remercier mon directeur de Thèse, M. Francis Castanié pour m’avoir fait confiance en me confiant ce sujet de recherche et mes trois rapporteurs, Petar M. Djurić (professeur à l’université de Stony-Brook, USA), Nadine Martin (directeur de recherches LIS, Grenoble) et Miguel A. Lagunas (professeur Univ. Politécnica de Catalunya, Espagne) pour leur intérêt dans mes travaux de recherches et le rapport qu’ils ont produit.

Merci aussi à Sylvie Eichen, secrétaire émérite, pour ses compétences et la rapidité avec laquelle elle traite les problèmes de tous mais aussi pour sa bonne humeur et la bonne ambiance qu’elle suscite au laboratoire.

Merci encore à tout “le noyau dur” du repas du midi : Jean-Luc Scharbarg, André-Luc Beylot, Jérôme Ermont, Jean-Yves Tournet, Patrice Michel et Marc Boyer (en demandant pardon à tous ceux que j’oublie) pour la bonne humeur de ces rencontres quotidiennes autour d’un repas ou d’un café.

Enfin, un merci très particulier pour ma co-directrice de thèse, Corinne Mailhes, qui m’a permis de découvrir et d’appréhender le difficile métier de chercheur en m’accompagnant tout au long de ces trois ans par ses conseils avisés et précieux ainsi que pour la sympathie dont elle a toujours fait preuve.

Table des matières

Préface	iii
Avant-propos	v
1 Contexte de l'étude	1
1.1 Introduction	2
1.2 Analyse spectrale	3
1.2.1 Hypothèses	3
1.2.2 La fonction d'autocorrélation et ses estimateurs	4
1.2.3 Estimation spectrale classique	7
1.2.4 Estimation spectrale paramétrique	12
1.2.5 Comparaison et conclusion	14
1.3 Découpage en sous-bandes	17
1.3.1 Généralités et notations	18
1.3.2 Approche physique	20
1.3.3 La transformée de Fourier glissante et le découpage en sous-bandes	21
1.3.4 La transformée en ondelettes discrète dyadique et le découpage en sous-bandes	24
1.3.5 Le dilemme temps-fréquence	26
1.3.6 Avantages de la TO par rapport à la TF glissante	27
2 Analyse spectrale dans les sous-bandes	29
2.1 Introduction	29
2.2 Avantages liés à l'ordre des modèles	30

2.2.1	Réduction de l'ordre des modèles	30
2.2.2	Nombre de conditionnement des matrices d'autocorrélation . .	33
2.3	Avantages liés au filtrage et à la décimation	35
2.3.1	Résolution fréquentielle linéaire	35
2.3.2	Rapport Signal à Bruit local	36
2.3.3	Blanchiment de la densité spectrale de puissance	37
2.3.4	Erreur de prédiction linéaire	40
2.4	Inconvénients	43
2.4.1	Introduction	43
2.4.2	Variance des estimateurs d'autocorrélation	44
2.4.3	Recouvrement spectral et continuité de l'estimateur de densité spectrale de puissance	45
3	Les solutions proposées	53
3.1	Introduction	53
3.2	Recouvrement spectral et continuité de l'estimateur	53
3.2.1	Introduction	53
3.2.2	Élimination du recouvrement spectral et des discontinuités . .	54
3.3	Modèle auto-régressif avec décalage temporel	67
3.3.1	Introduction	67
3.3.2	Le modèle proposé	68
3.3.3	Estimation des coefficients de prédiction	70
3.3.4	Propriétés de l'erreur de prédiction	72
3.3.5	Analyse Spectrale à base de modèle <i>AR</i> à décalage temporel .	74
3.3.6	Algorithme	76
3.4	Modèle auto-régressif multi-dimensionnel	77
3.4.1	Introduction	77
3.4.2	Estimation des matrices de prédiction	78
3.4.3	Propriétés de l'erreur de prédiction	79
3.4.4	Analyse Spectrale à base de modèle <i>AR</i> multi-dimensionnel .	81
3.4.5	Algorithme	82

3.5	Conclusion	83
4	Évaluation des performances	87
4.1	Introduction	87
4.2	Estimation des autocorrélations	88
4.3	Choix des paramètres de modélisation des sous-bandes	93
4.4	Intérêt des modèles <i>ARDT</i> dans les sous-bandes	94
4.4.1	Signaux à spectre de raies	94
4.4.2	Signaux à spectre continu	97
4.5	Intérêt des modèles <i>AR</i> multi-dimensionnels	99
4.5.1	Signaux à spectre de raies	100
4.5.2	Signaux à spectre continu	101
4.6	Analyse spectrale dans les sous-bandes	103
4.6.1	Recul de la borne de Cramer-Rao et amélioration du conditionnement	103
4.6.2	Amélioration de la résolution spectrale : cas d'un signal réel	106
5	Conclusion	111
A	Transformée de Fourier des sous-séries décimées	113
B	Autocorrélation par <i>TFD</i> et <i>TFD</i> inverse	117
	Bibliographie	124

Chapitre 1

Contexte de l'étude

L'objectif de cette thèse est multiple : d'abord on souhaite présenter les différents avantages de l'analyse spectrale dans les sous-bandes ainsi que les difficultés qu'on rencontre lors de sa mise en œuvre.

Ceci sera fait tout au long du manuscrit en comparant les résultats d'un même type d'analyse spectrale (paramétrique ou non), lorsque celle-ci est appliquée directement sur les échantillons dont on dispose du signal original ou lorsqu'elle est appliquée sur les sous-signaux issus du découpage en sous-bandes. Concernant le choix de la méthode d'analyse spectrale, cette thèse est focalisée sur l'emploi de techniques paramétriques plutôt que sur l'emploi de méthodes dérivées de la théorie de Fourier même si, dans la première partie du chapitre 1, on présente ces deux types de méthodes.

Lorsqu'on fait de l'analyse spectrale, on peut être intéressé selon l'application par la mesure de différentes caractéristiques de la densité spectrale de puissance d'un processus aléatoire. Afin d'illustrer ceci, on peut par exemple citer le cas de l'astrophysique dans lequel on s'intéresse à l'estimation du "fond de spectre" pour la détection d'exoplanètes alors que dans le domaine de l'aviation, on s'intéresse parfois à l'estimation de la fréquence et de l'amplitude des différents modes structuraux qui font vibrer la voilure des appareils. Entre ces différentes exigences difficilement quantifiables, il devient difficile de comparer la méthode large bande et la méthode sous-bandes. Cette complexité du problème de l'analyse spectrale nous a donc conduits dans le chapitre 2 à considérer de très nombreux critères dans le but de rendre la comparaison la plus objective possible.

Le deuxième objectif de la thèse est de présenter diverses méthodes originales permettant de tirer parti des bénéfices du découpage en sous-bandes permettant de tirer parti des bénéfices du découpage en sous-bandes, tout en éliminant certains de ses inconvénients. En particulier, on y trouvera deux solutions pour éliminer le recouvrement spectral induit par la diminution de la fréquence d'échantillonnage et l'utilisation de filtres non idéaux. Comme on le verra, ces deux méthodes peuvent s'appliquer à n'importe quel type d'analyse spectrale (paramétrique ou non). Deux autres solutions permettant d'améliorer encore l'estimation spectrale en utilisant l'information a priori apportée par la connaissance de l'intercorrélacion entre les différentes sous-séries issues de la décimation seront également présentées : les modèles auto-régressifs avec décalage temporel (qui est un type de modélisation prédictive développé dans cette thèse) et l'application de la modélisation auto-régressive vectorielle à l'estimation du spectre commun des sous-séries issues de la décimation à l'extrémité d'une même sous-bande.

1.1 Introduction

Ce chapitre introductif a pour but de présenter les principes de ces deux grands axes du traitement du signal qui constituent le sujet de notre étude : l'analyse spectrale et le découpage en sous-bandes.

Dans la première partie du chapitre, on fera la synthèse des deux différentes grandes familles de méthodes d'analyse spectrale : l'analyse spectrale "classique", basée sur la théorie de Fourier et l'analyse spectrale paramétrique, qui fait l'hypothèse d'un modèle stochastique ou déterministe des signaux à analyser. Ainsi, l'existence supposée d'un modèle de génération des signaux dont on dispose, permet de ramener le problème de l'analyse spectrale à un problème d'estimation de *paramètres*. On a alors accès à la densité spectrale de puissance de ces signaux par un calcul basé sur ce modèle. On quitte alors le domaine de l'analyse spectrale classique pour celui de la théorie de l'estimation statistique et le grand nombre de travaux scientifiques dans

ce domaine (voir par exemple [10], [11], [12] et [13]) est un atout supplémentaire pour ces méthodes. Après avoir rappelé les principes de ces deux types d'analyse, nous présenterons des éléments de comparaison permettant de comprendre dans quels cas la modélisation paramétrique est préférable à l'analyse de type Fourier.

La deuxième partie du chapitre sera consacrée à une présentation du découpage en sous-bande, accompagnée de divers exemples d'utilisation issus du contexte de l'analyse spectrale. Plus précisément, on verra comment les bancs de filtres peuvent servir de support d'étude théorique dans des domaines très variés du traitement du signal en se limitant à l'exemple de l'analyse temps-fréquence. En effet, cette application particulière nous a paru intéressante dans la mesure où elle permet d'introduire le principe d'incertitude d'Heisenberg-Gabor qui est une notion très importante de l'analyse spectrale.

1.2 Analyse spectrale

1.2.1 Hypothèses

Notons d'ores et déjà que nous nous plaçons dans le cadre de l'estimation de la densité spectrale de puissance de processus aléatoires échantillonnés. Cette estimation sera effectuée à l'aide de réalisations de ces processus aléatoires et chacune de ces réalisations sera bien sûr à considérer dans un contexte déterministe. De plus, l'observation de ces réalisations se fera dans un intervalle de temps fixé et les réalisations observées seront donc à support temporel fini. A fortiori, on sera donc dans le cadre des signaux déterministes échantillonnés, à énergie finie. Dans le reste de ce document, on supposera que tous les signaux sont stationnaires au second ordre, de sorte que leurs fonctions d'autocorrélation ne dépendent que d'une seule variable. On pourra ainsi s'intéresser à l'estimation de leur densité spectrale de puissance au sens strict qui n'est définie que pour les signaux stationnaires.

En plus de la stationnarité, on fera l'hypothèse de l'ergodicité au second ordre, du processus aléatoire $\mathcal{U} = \{u(n), n \in \mathbb{Z}\}$. Par définition, le processus aléatoire \mathcal{U} est

ergodique au second ordre si et seulement si la somme stochastique :

$$S_N = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u(n)u^*(n-k) \quad (1.1)$$

est dégénérée, c'est-à-dire :

$$\text{Var} [S_N] = 0 \quad (1.2)$$

où $\text{Var}[\cdot]$ est l'opérateur de variance.

Si un processus aléatoire \mathcal{U} est ergodique et stationnaire au second ordre, on a la propriété fondamentale suivante :

$$E [u(n)u^*(n-k)] = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u_{obs}(n)u_{obs}^*(n-k) \quad (1.3)$$

où $E[\cdot]$ représente l'opérateur d'espérance mathématique et $\mathcal{U}_{obs} = \{u_{obs}(n), n = 0, \dots, N-1\}$ est une réalisation quelconque de \mathcal{U} . Dans la pratique, on pourra donc estimer l'autocorrélation de \mathcal{U} à partir d'une seule réalisation \mathcal{U}_{obs} en remplaçant la moyenne statistique par une moyenne temporelle, pourvu qu'on dispose d'un nombre suffisant d'échantillons afin de bien approcher la limite.

Enfin, la variable f désignera la fréquence normalisée, ou de façon équivalente, on supposera que la fréquence d'échantillonnage est de 1 Hz.

1.2.2 La fonction d'autocorrélation et ses estimateurs

Définitions

Pour les signaux aléatoires stationnaires, la fonction d'autocorrélation, notée $r_u(k)$, est définie comme suit :

$$r_u(k) \stackrel{def}{=} E [u(n)u^*(n-k)] \quad (1.4)$$

On peut montrer très généralement que celle-ci se décompose toujours en une somme de trois termes :

$$r_u(k) = r_{u1}(k) + r_{u2}(k) + r_{u3}(k) \quad (1.5)$$

avec :

- $r_{u1}(k)$ évanescence (i.e. $\lim_{k \rightarrow +\infty} r_{u1}(k) = 0$).
- $r_{u2}(k)$ somme de fonctions périodiques.
- $r_{u3}(k)$ singulière.

$r_{u3}(k)$ n'a pas d'existence physique très répandue et sera presque toujours négligée en traitement du signal. En ce qui concerne les 2 autres termes de la décomposition, ils vont donner lieu à une distinction importante entre les signaux à spectre *de raies*, qui constituent la classe des signaux temporels périodiques (donc admettant mathématiquement une décomposition en série de Fourier) et les signaux à spectre *continu*, sans périodicité temporelle, et dont la transformée de Fourier ne se simplifie pas en une simple somme d'impulsions de Dirac.

Dans la pratique, on calcule l'autocorrélation en utilisant la propriété d'ergodicité à partir d'une réalisation quelconque \mathcal{U}_{obs} comportant un nombre N suffisamment grand d'échantillons. En utilisant l'hypothèse d'ergodicité, on démontre que :

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N-k} \sum_{n=k}^{N-1} u_{obs}(n) u_{obs}^*(n-k) &= E[u(n) u^*(n-k)] \\ &= r_u(k) \end{aligned} \quad (1.6)$$

ce qui permet d'estimer la fonction d'autocorrélation à partir d'une seule réalisation \mathcal{U}_{obs} .

Dans la suite de cette section, nous allons nous intéresser aux propriétés statistiques au premier et au second ordre des estimateurs biaisé et non biaisé de l'autocorrélation notés respectivement $\hat{r}_u^{(1)}(k)$ et $\hat{r}_u^{(2)}(k)$.

Remarquons qu'étant donnée la symétrie hermitienne des fonctions d'autocorrélation, on ne s'intéressera dans la suite de cette partie qu'aux termes d'indice $k \geq 0$.

Estimation de l'autocorrélation par TFD et TFD inverse

L'idée est de calculer la fonction d'autocorrélation en prenant la transformée de Fourier inverse du périodogramme échantillonné en fréquences du signal aléatoire $u(n)$ préalablement complété par des 0 ("zero-padding") jusqu'à la puissance de $2 N_p$ strictement supérieure à N . Plus précisément :

$$\hat{r}_u^{(3)}(k) \stackrel{def}{=} \frac{1}{N_p} \sum_{l=0}^{N_p-1} \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} u(n) e^{-i2\pi \frac{l}{N_p} n} \right|^2 e^{i2\pi \frac{l}{N_p} k} \quad (1.7)$$

Cette méthode de calcul donne numériquement le même résultat que l'estimateur biaisé et son seul intérêt est de profiter de l'algorithme de transformée de Fourier rapide afin de diminuer le temps de calcul par rapport à un calcul basé sur les échantillons temporels :

$$\hat{r}_u^{(3)}(k) = \hat{r}_u^{(1)}(k) \quad (1.8)$$

A noter que le zero-padding est indispensable même si N est déjà une puissance de 2. Si on l'omet, on obtient un très mauvais estimateur

$$\hat{r}_u^{(4)}(k) \stackrel{def}{=} \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} u(n) e^{-i2\pi \frac{l}{N} n} \right|^2 e^{i2\pi \frac{l}{N} k} \quad (1.9)$$

qui s'exprime exactement en fonction des estimateurs 1 ou 2 (biaisé ou non biaisé), ainsi qu'il est montré en Annexe B :

$$\hat{r}_u^{(4)}(k) = \hat{r}_u^{(1)}(k) + \hat{r}_u^{(1)}(k - N) \quad (1.10)$$

Il n'a que peu d'intérêt théorique étant donné que son biais n'est pas simple à compenser :

$$E \left[\hat{r}_u^{(4)}(k) \right] = \frac{N - |k|}{N} r_u(k) + \frac{N - |k - N|}{N} r_u(k - N) \quad (1.11)$$

Cet estimateur aura néanmoins des propriétés statistiques au premier ordre très proches de celles de l'estimateur 1 pour la classe des signaux à autocorrélation évanescence et pour $k \ll N$. En revanche, pour les signaux dont l'autocorrélation contient un terme périodique, l'omission du zero-padding pourra se révéler désastreuse ainsi qu'il est montré en annexe B où on peut voir le résultat de cette méthode sur un bruit blanc et une sinusoïde bruitée.

Propriétés statistiques

On peut trouver dans [2], [14], [15] et [16] une étude détaillée des estimateurs 1 et 2. Concernant les propriétés statistiques d'estimateurs spectraux et d'autocorrélation, on peut aussi trouver d'importants résultats dans [5]. Le tableau récapitulatif suivant présente les résultats concernant les propriétés statistiques au premier et second ordre

de ces estimateurs :

	estimateur 1 (biaisé)	estimateur 2 (non biaisé)
moyenne $E[\hat{r}_u(k)]$	$(1 - \frac{k}{N}) r_u(k)$	$r_u(k)$
variance $Var[\hat{r}_u(k)]$ pour $k \ll N$	$\frac{1}{N} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (r_u^2(l) + r_u(l+k)r_u(l-k))$	$\frac{N}{(N-k)^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (r_u^2(l) + r_u(l+k)r_u(l-k))$

On constate d'une part que $Var[\hat{r}_u^{(2)}(k)] = \frac{N^2}{(N-k)^2} Var[\hat{r}_u^{(1)}(k)]$ et donc que l'estimateur 2 (non biaisé) a une variance plus forte que l'estimateur 1 pour $k \neq 0$, ce qui va devenir réellement gênant lorsque l'indice k va augmenter. Il faudra donc se limiter à un nombre d'échantillons raisonnable selon les applications, de l'ordre de $N/2$ ou $3N/4$ (voir [17]). D'autre part, on constate que la variance de ces 2 estimateurs tend asymptotiquement vers 0 lorsque $N \rightarrow \infty$, ce qui en fait des estimateurs *consistants*.

1.2.3 Estimation spectrale classique

Définitions

On définit dans la littérature deux grandes classes de signaux : les signaux à temps continu, qui peuvent être représentatifs de mesures issues du monde de la physique et leurs versions échantillonnées, nécessaires à leur éventuel traitement numérique, qui constituent la classe des signaux à temps discret. Parmi ces deux grandes classes, on définit encore d'autres sous familles comme indiqué sur la figure (1.1).

Pour un signal *déterministe* $x(t)$ à temps continu, et à énergie finie (cas (a)), on peut définir une transformée de Fourier :

$$TF_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt \quad (1.12)$$

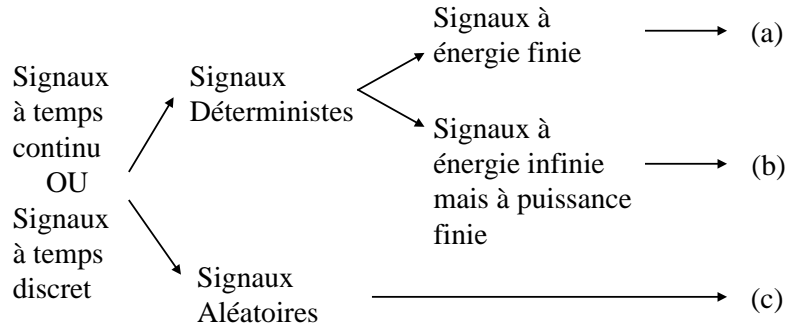


FIG. 1.1 – Classes de signaux.

De même, pour un signal $x(n)$ de la classe des signaux à temps discret, on définit une transformée de Fourier Discrète toujours dans le cas (a) :

$$TFD_x(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-i2\pi fn} \quad (1.13)$$

Comme indiqué dans la partie 1.2.1, on s'intéresse à l'estimation de la densité spectrale de puissance de processus aléatoires échantillonnés à partir de la connaissance d'une de ses réalisations sous forme échantillonnée. Comme les réalisations sont à support borné, les deux cas auxquels on va s'intéresser sont les cas (a) et (c) pour la classe des signaux à temps discret.

Pour les signaux aléatoires, la transformée de Fourier n'est pas définie mais on peut néanmoins définir une densité spectrale de puissance par :

$$S_u(f) \stackrel{def}{=} TFD_{r_u}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_u(k)e^{-i2\pi fk} \quad (1.14)$$

où $r_u(k)$ est l'autocorrélation du signal aléatoire $u(n)$ définie par :

$$r_u(k) \stackrel{def}{=} E[u(n)u^*(n-k)] \quad (1.15)$$

et TFD est l'opérateur de transformée de Fourier Discrète défini ci-dessus.

Lorsqu'on s'intéresse aux réalisations $u_{obs}(n)$ de ce signal $u(n)$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$ (où N est le nombre d'échantillons observés) on se retrouve donc dans le cas (a) pour la classe des signaux déterministes. On peut alors utiliser sa transformée de Fourier discrète. Dans ce cadre, on définit une densité spectrale d'énergie au lieu de la densité spectrale de puissance :

$$DSE_{u_{obs}}(f) = TFD_{r_{u_{obs}}}(f) \quad (1.16)$$

où $r_{u_{obs}}(k)$ est l'autocorrélation discrète du signal $u_{obs}(n)$ définie par :

$$r_{u_{obs}}(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_{obs}(n)u_{obs}^*(n-k) \quad (1.17)$$

Le théorème de Bochner-Khinchine s'écrit :

$$|U_{obs}(e^{i2\pi f})|^2 = TFD_{r_{u_{obs}}}(f) \quad (1.18)$$

A noter que le signal $u_{obs}(n)$ étant à support borné, les sommes intervenant dans la définition de l'autocorrélation et de la TFD seront également à support borné. Comme on désire en réalité estimer la densité spectrale de puissance (DSP) du signal aléatoire $u(n)$ à partir de la densité spectrale d'énergie correspondant aux N échantillons observés, on doit utiliser l'hypothèse d'ergodicité. En prenant la TFD dans chaque membre de l'équation (1.3), on obtient directement :

$$S_u(f) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} DSE_{u_{obs}}(f) \quad (1.19)$$

Dans la pratique, on supposera que N est assez grand pour que la limite soit correctement approchée. Ainsi :

$$S_u(f) \simeq \frac{1}{N} DSE_{u_{obs}}(f) \quad (1.20)$$

Au passage, on peut remarquer que la nécessité de diviser par un facteur N pour obtenir une estimation de la DSP de $u(n)$ signifie qu'il faudra prendre en compte un facteur M afin de comparer les densités spectrales d'énergie de signaux avant et après leur passage à travers un dispositif de décimation qui retient 1 échantillon sur M .

Estimateurs de DSP classiques

Il existe deux familles principales d'estimateurs de la DSP à base de transformée de Fourier : le *périodogramme* et le *corrélogramme*. Ce sont les estimateurs classiques de la DSP ou de type Fourier. Ils suivent le principe présenté figure (1.2), basé sur le théorème de Bochner-Khinchine.

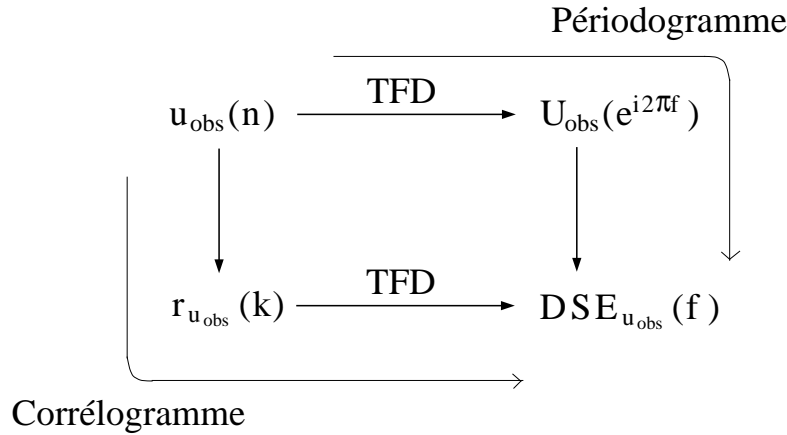


FIG. 1.2 – Principes du périodogramme et du corrélogramme.

Pour un signal aléatoire $u(n)$ dont on observe N échantillons indicés de 0 à $N - 1$, le périodogramme $\hat{S}_{Per}(f)$ est une fonction aléatoire de la variable continue f définie par :

$$\hat{S}_{Per}(f) \stackrel{def}{=} \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} u(n) e^{-i2\pi f n} \right|^2 \quad (1.21)$$

On peut également envisager l'emploi de fenêtre temporelles autres que la fenêtre rectangulaire en remplaçant $u(n)$ par $u(n)\omega(n)$ où $\omega(n)$ est l'expression de la fenêtre considérée. Pour le corrélogramme, on pose :

$$\begin{aligned} \hat{S}_{Corr}(f) &\stackrel{def}{=} TFD_{\hat{r}_u}(f) \\ &= \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \hat{r}_u(k) e^{-i2\pi f k} \end{aligned} \quad (1.22)$$

où $\hat{r}_u(k)$ est l'un des estimateurs quelconque de l'autocorrélation et qui est donc par définition à support borné sur le segment $[-(N - 1), N - 1]$. On définit ainsi en

particulier les corrélogrammes biaisé et non biaisé à partir des estimateurs 1 et 2 de l'autocorrélation.

Biais de ces estimateurs

On présente ici la nature et la valeur du biais pour chacun des 3 estimateurs : Périodogramme, Corrélogramme biaisé et Corrélogramme non biaisé. Les noms des deux types de corrélogrammes étudiés ici peuvent d'ailleurs prêter à confusion car ils sont en réalité tous les deux biaisés comme indiqué ci-dessous.

Dans le tableau présenté ci-après, nous indiquons pour chaque estimateur la nature et la valeur du biais en fonction du nombre d'échantillons observés N . De plus, dans le cas d'un processus composé d'une sinusoïde d'amplitude A additionnée de bruit blanc, de puissance σ^2 , le tableau fournit la hauteur et la largeur à -3 dB du "pic" spectral correspondant, dans le cas où on utilise une fenêtre rectangulaire (qui est celle qui permet d'obtenir la meilleure résolution, mais au prix d'ondulations importantes).

	Nature du biais	Valeur du biais	hauteur du pic (sinus bruité)	largeur du pic à -3 dB (sinus bruité)
Périodogramme	convolutif	$\frac{\sin^2 \pi f N}{N \sin^2 \pi f}$	$\sigma^2 + \frac{A^2 N}{4}$	$\frac{2\sqrt{6-3\sqrt{2}}}{\pi N}$
Corrélogramme 1	convolutif	$\frac{\sin^2 \pi f N}{N \sin^2 \pi f}$	$\sigma^2 + \frac{A^2 N}{4}$	$\frac{2\sqrt{6-3\sqrt{2}}}{\pi N}$
Corrélogramme 2	convolutif	$\frac{\sin \pi f (2N-1)}{\sin \pi f}$	$\sigma^2 + \frac{A^2 (2N-1)}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{\pi N}$

Le périodogramme et le corrélogramme 1 sont statistiquement équivalents au 1^{er} ordre et n'ont donc pas vraiment à être comparés. Le corrélogramme 2 présente l'avantage d'avoir un pic plus fin dans le cas d'une somme de sinusoïdes bruitées, d'où une meilleure résolution spectrale linéaire. Par contre, les oscillations sont plus importantes comme indiqué figure (1.3) où on a tracé le périodogramme et le corrélogramme

2 (non biaisé) d'une sinusoïde bruitée dont on observe $N = 30$ échantillons. Un autre inconvénient du corrélogramme non biaisé est que cet estimateur peut éventuellement prendre des valeurs négatives.

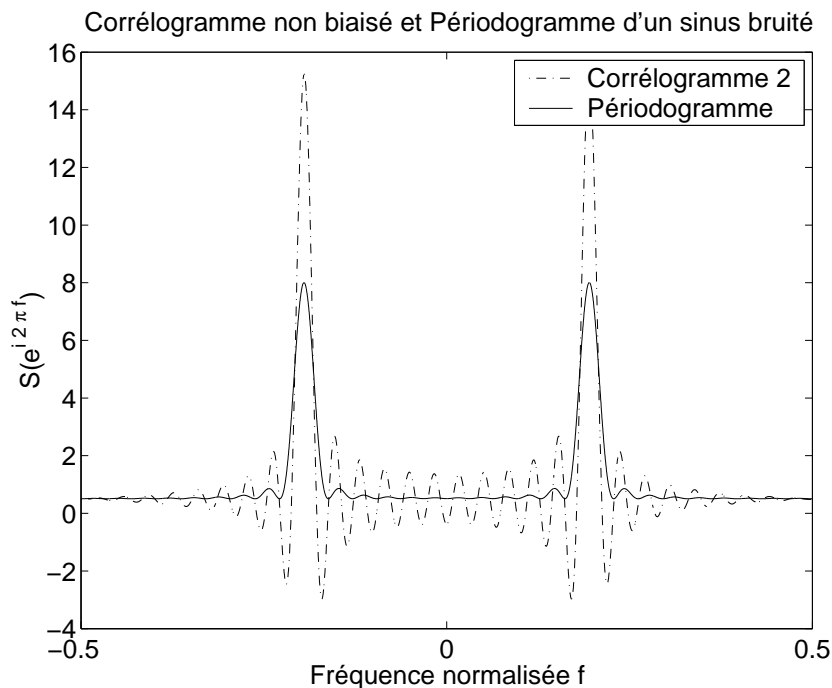


FIG. 1.3 – Corrélogramme 2 (non biaisé) et Périodogramme d'une sinusoïde bruitée.

1.2.4 Estimation spectrale paramétrique

De très nombreuses méthodes d'analyse spectrale existent dans la littérature du Traitement du Signal. L'objectif de cette thèse, n'est pas d'en fournir une liste exhaustive mais on peut néanmoins signaler ici que la quasi-totalité de ces méthodes reposent sur l'estimation de l'autocorrélation du signal à analyser $u(n)$.

Contrairement à l'analyse spectral "classique", c'est-à-dire liée à la transformée de Fourier (comme le périodogramme ou le corrélogramme), l'analyse spectrale paramétrique est basée sur la connaissance ou l'hypothèse d'un modèle mathématique du signal à analyser. On cherche alors à estimer les *paramètres* de ce modèle à partir des

échantillons du signal, ce qui donne accès à une connaissance très complète du signal, et en particulier à son spectre, en remplaçant les paramètres inconnus du modèle par ceux estimés à partir des N échantillons du signal dont on dispose.

Le corrélogramme ou le périodogramme estiment une version biaisée du spectre, directement à partir des échantillons du signal. En revanche, les modélisations paramétriques permettent d'obtenir des estimateurs non biaisés du spectre, pourvu que l'estimation des paramètres soit sans biais.

Encore mieux : une des plus importantes contributions de la théorie de l'estimation statistique est probablement l'introduction de l'estimateur MV (Maximum de Vraisemblance) par Kendall et Stuart en 1979 dans [10] et on peut montrer que si on arrive à obtenir un estimateur MV des paramètres et qu'on remplace les paramètres de la densité spectrale de puissance théorique du modèle par ceux-ci, on obtient un estimateur MV de la densité spectrale de puissance.

Bien sûr, tout ceci n'est vrai que dans le cas où le modèle choisi est bien adapté au signal qu'on veut analyser. Dans la pratique, le problème du choix du modèle se pose. Il est généralement dicté par la nature du signal à modéliser et si la connaissance a priori est faible, on peut être amenés à tester plusieurs modèles. Un autre point crucial est le choix de la dimension du modèle (nombre de paramètres) : une dimension trop faible conduit à une faible pertinence du modèle et une dimension trop élevée pose généralement des problèmes numériques lors de l'estimation des paramètres et par conséquent conduit à une augmentation de la variance d'estimation.

Hormis l'analyse spectrale, il existe bien sûr d'autres applications des modélisations paramétriques, comme la transmission de données, compression, détection, ... Parmi les méthodes les plus utilisées, figurent la modélisation de Prony, adaptée pour les signaux composés d'une somme de sinusoides amorties, ainsi que toutes les méthodes à base de modélisation Auto-Régressive (AR), comme la méthode des covariances ou les méthodes de type Yule-Walker (méthode des autocorrélations, méthode Moindres Carrés-Yule Walker ou méthode Moindres Carrés Totaux-Yule Walker). A noter que la méthode des autocorrélations présente l'avantage de fournir des pôles

qui sont toujours à l'intérieur du cercle unité lorsqu'on utilise l'estimateur biaisé de l'autocorrélation. Ce deuxième ensemble de méthodes est adapté aux signaux ayant un spectre rationnel (ou plus précisément dont la densité spectrale de puissance peut s'approcher par une fraction rationnelle trigonométrique : $S_u(f) = \left| \frac{A(e^{i2\pi f})}{B(e^{i2\pi f})} \right|^2$ où A et B sont des polynômes de la variable complexe z^{-1}), ce qui représente une très grande variété de classes de signaux.

Enfin, on peut citer les méthodes dites haute-résolution comme Pisarenko, Root-MUSIC et ESPRIT, basées sur une décomposition en valeurs singulières de la matrice d'autocorrélation du signal à analyser et les méthodes basées sur les moments d'ordre supérieur. On pourra trouver un panorama très complet de ces méthodes dans [17] et [7].

1.2.5 Comparaison et conclusion

A priori, on peut dire que les méthodes paramétriques de type modélisation AR tendent à prédire les échantillons futurs et/ou passés à partir des échantillons recueillis dans la fenêtre d'observation. L'horizon d'observation se trouve donc artificiellement élargi, ce qui améliore les performances de l'estimation spectrale par rapport à des méthodes de type Fourier.

Mais les densités spectrales de puissance obtenues par modélisations paramétriques restent bien entendu soumises au principe d'Heisenberg-Gabor. Dans le cas de signaux à spectre de raies, la définition de la résolution spectrale, notée W_{AR} , sera la largeur du pic à -3 dB comme indiqué sur la figure (1.4).

On peut montrer que dans le cas d'une modélisation AR d'ordre p appliquée à un signal composé d'une sinusoïde d'amplitude A et de phase aléatoire, noyée dans un bruit blanc centré de puissance σ^2 , la largeur du pic à -3 dB est de l'ordre de :

$$W_{AR} \simeq \frac{6}{\pi p(p+1)\gamma} \quad (1.23)$$

où γ est le rapport signal à bruit défini par $\gamma = \frac{A^2}{2\sigma^2}$. Ce résultat est obtenu dans [18].

L'intérêt majeur de la modélisation AR est de rendre cette résolution a priori indépendante du nombre d'échantillons disponibles N . A priori seulement car N va

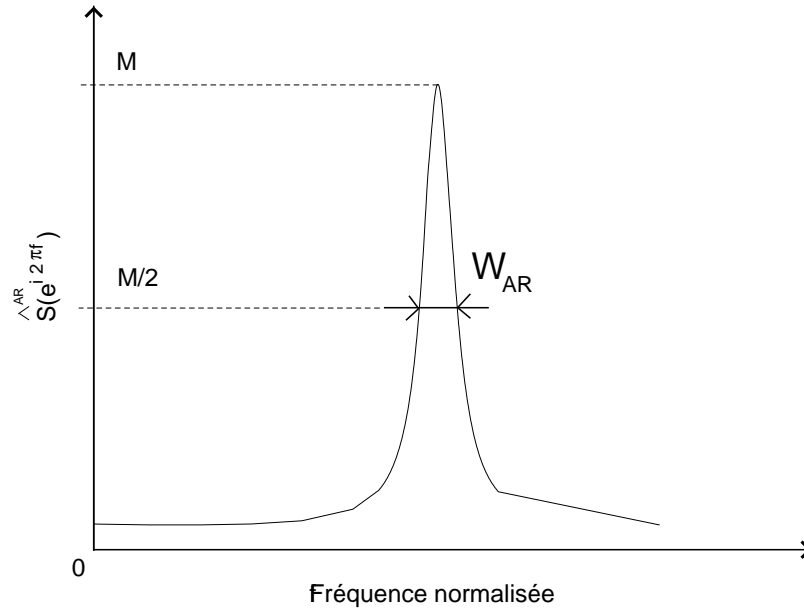


FIG. 1.4 – Définition de la résolution spectrale.

grandement influencer la qualité des estimateurs d'autocorrélation que nécessitent la quasi-totalité des méthodes d'estimation paramétriques. (voir section 1.2.2).

Toujours dans le cas d'une sinusoïde de fréquence f_0 noyée dans un bruit blanc additif, l'expression du périodogramme (voir équation (1.21)) dans le cas de l'emploi d'une fenêtre rectangulaire est :

$$\hat{S}_{Per}(f) = \sigma^2 + \frac{A^2}{4} \left(\frac{\sin^2 \pi N(f - f_0)}{N \sin^2 \pi(f - f_0)} + \frac{\sin^2 \pi N(f + f_0)}{N \sin^2 \pi(f + f_0)} \right) \quad (1.24)$$

On peut voir une représentation de cette fonction sur la figure (1.5). On peut montrer que cette fois, la largeur du pic à -3 dB est indépendante de σ^2 mais dépend de N :

$$W_{Per} \simeq \frac{2\sqrt{6 - 3\sqrt{2}}}{\pi N} \quad (1.25)$$

On peut en déduire que pour un SNR (rapport signal à bruit) γ fixé, il existe un nombre d'échantillons limite N_0 en-dessous duquel il devient préférable, au moins du point de vue de la résolution spectrale linéaire, d'envisager une estimation spectrale

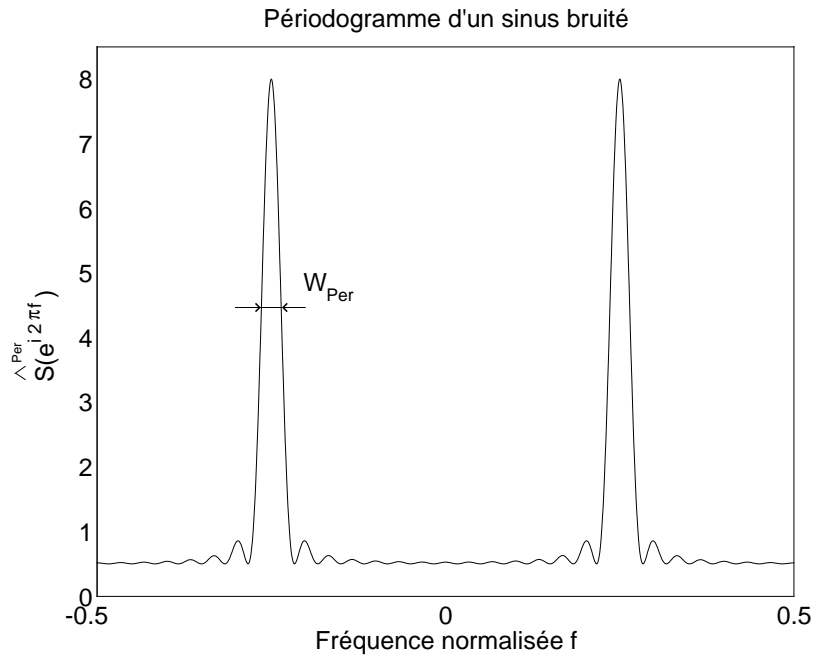


FIG. 1.5 – Périodogramme d'un sinus bruité.

par modélisation AR plutôt qu'un simple périodogramme :

$$W_{Per} = W_{AR} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{6-3\sqrt{2}}}{\pi N_0} = \frac{6}{\pi p(p+1)\gamma} \Leftrightarrow N_0 = \frac{\sqrt{6-3\sqrt{2}}}{3} p(p+1)\gamma \quad (1.26)$$

Pour fixer les idées, voici ci-dessous des applications numériques dans le cas où on choisirait $p = 2$ comme ordre de modélisation AR .

SNR (dB)	N_0
0	3
10	27
20	265
30	2651
40	26513

La figure (1.6) illustre graphiquement ces résultats numériques. Bien sûr, ils ne sont valables théoriquement que pour une sinusoïde bruitée mais la conclusion générale peut s'étendre à un signal composé d'une somme de sinusoïdes noyées dans du bruit,

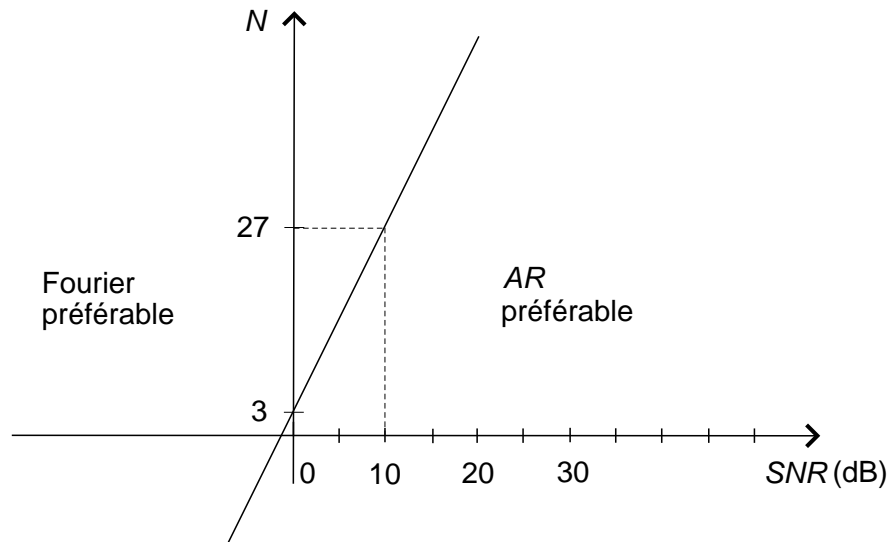


FIG. 1.6 – Comparaison entre analyse spectrale classique (Fourier) et Paramétrique (AR).

et même à des signaux à spectre “continu” (provenant du terme évanescent dans la décomposition de la fonction d’autocorrélation). A l’inverse, on peut considérer que pour un nombre d’échantillons fixé, la modélisation AR est meilleure pour les SNR élevés alors que le périodogramme sera adapté aux signaux très bruités.

1.3 Découpage en sous-bandes

L’objectif de ce travail de thèse étant de conduire une étude sur l’intérêt de l’analyse spectrale couplée à un découpage en sous-bande, après avoir rappelé les principes généraux de l’analyse spectrale, nous allons présenter dans ce paragraphe les points fondamentaux du découpage en sous-bandes.

Le découpage en sous-bandes a été utilisé avec succès depuis de nombreuses années dans diverses applications du traitement du signal, comme le codage audio ou la compression d’images ou de vidéos. On peut citer en particulier le célèbre $MP3$, qui est un algorithme basé sur l’utilisation d’un découpage en sous-bandes particulier. Dans le domaine des télécommunications, il peut être employé comme une technique

de codage canal afin d'introduire de la redondance sur le signal à transmettre qui sera ensuite exploitée au niveau de la réception par des techniques de correction d'erreurs.

1.3.1 Généralités et notations

Le découpage en sous-bandes d'un signal est obtenu à l'aide d'un banc de filtres dont le schéma général représenté figure (1.7). Dans cette figure, $\{H_k, G_k, k = 0, \dots, M-1\}$ correspondent aux transmittances des filtres, tandis que $\downarrow m_k$ et $m_k \uparrow$ sont respectivement les décimateurs et interpolateurs associés à ces filtres.

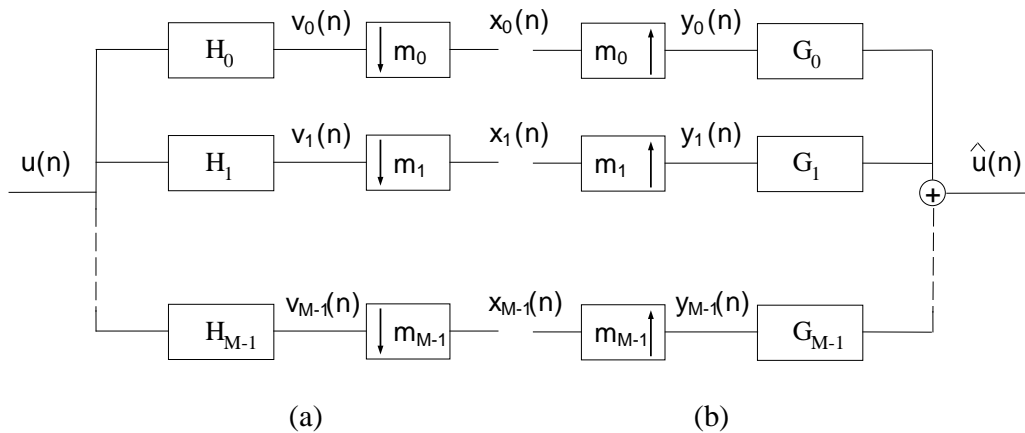


FIG. 1.7 – Banc de filtres d'analyse (a) et de synthèse (b).

Si $\sum_{k=0}^{M-1} \frac{1}{m_k} = 1$, on parle de banc de filtres *maximalement décimé*. Si cette somme est inférieure à 1, le banc de filtres est sur-décimé et si elle est supérieure à 1, il est sous-décimé. Ces derniers peuvent par exemple servir à introduire de la redondance au début des chaînes de transmission numérique (voir [19]). Dans le cas où $m_0 = m_1 = \dots = m_{M-1} = M$, on a un banc de filtres *uniformes*. On a coutume aussi de les appeler bancs de filtres miroirs en quadrature par analogie au cas $M = 2$ même si, dans le cas où M est quelconque, cette appellation n'est plus vraiment justifiée.

Les travaux présentés dans cette thèse ne concernant pas l'étude précise des bancs de filtres de découpage en sous-bande, on limitera l'étude au cas qui nous a paru le plus intéressant : le banc de filtres uniforme, maximalement décimé. Pour une étude plus précise du découpage en sous-bandes, le lecteur pourra se référer à des ouvrages

dédiés au sujet comme [20] et [21]. De plus, dans le cas qui nous occupe (l'estimation spectrale à partir des signaux de sous-bande), les propriétés de "reconstruction parfaite" (voir [20], p. 237) ne sont pas requises a priori et l'étude des filtres de synthèse G_0, G_1, \dots, G_{M-1} devient alors inutile.

Pour poser les notations, considérons le schéma de la figure (1.8). Le banc de

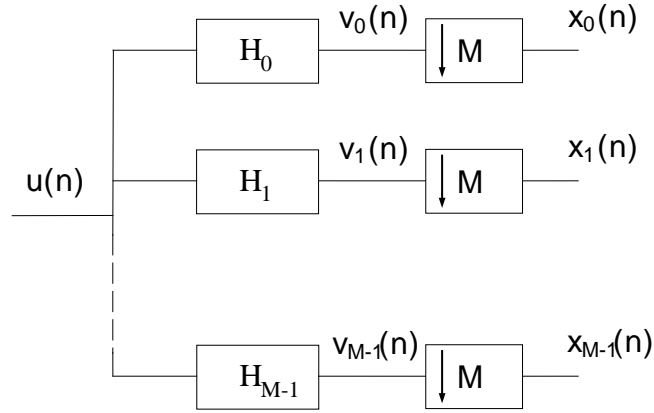


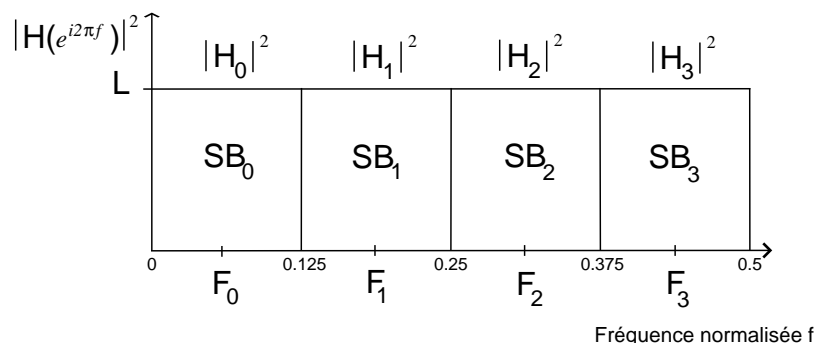
FIG. 1.8 – Banc de filtres d'analyse.

filtres étant uniforme, on notera pour $j \in [0, \dots, M-1]$ $SB_j = [(j-1)\frac{0.5}{M}, j\frac{0.5}{M}]$ la $j^{\text{ème}}$ sous-bande et $F_j = \frac{0.25}{M} + j\frac{0.5}{M}$, le centre de SB_j . Un exemple de banc de filtres d'analyse idéaux pour $M = 4$ est donné figure (1.9). Dans cette figure, et tout au long du manuscrit, le terme de fréquence normalisée se rapporte à la fréquence d'échantillonnage du signal original $\{u(n), n \in \mathbb{Z}\}$.

En notant $\forall j \in [0, \dots, M-1]$, $x_j(n) = v_j(Mn)$, le calcul de la transformée de Fourier de $x_j(n)$ exprimée en Mf donne :

$$\begin{aligned} X_j(e^{i2\pi Mf}) &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} V_j(e^{-i2\pi(f-\frac{k}{M})}) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H_j(e^{-i2\pi(f-\frac{k}{M})})U(e^{-i2\pi(f-\frac{k}{M})}) \end{aligned} \quad (1.27)$$

De façon très générale, les bancs de filtres tels que celui représenté figure (1.7) peuvent être utilisés en tant qu'outils d'unification théorique dans de nombreux domaines du traitement du signal comme le filtrage par blocs, l'échantillonnage non

FIG. 1.9 – Sous-bandes pour $M = 4$.

uniforme, les systèmes variant périodiquement dans le temps ou la théorie issue de la transformée en ondelettes (voir [20], chapitres 4 et 5). Après une partie consacrée à l'approche physique du découpage en sous-bandes, le reste du chapitre est consacré à l'analyse temps-fréquence en tant qu'illustration des applications du découpage en sous-bandes liée à l'estimation spectrale.

1.3.2 Approche physique

Le découpage en sous-bandes permet d'observer un signal à plusieurs "échelles". Afin d'illustrer ceci, considérons le cas d'un signal $u(n)$ composé d'une somme de 2 sinusoides de fréquences très éloignées $f_1 = 0.25/64$ et $f_2 = (0.25 + 14 \times 0.5)/64$ (le choix de ces valeurs numériques pour les fréquences sera justifié un peu plus loin) et d'amplitudes $A_1 = 1$ et $A_2 = 0.1$ avec des phases quelconques. La représentation temporelle de $u(n)$ est donnée figure (1.10).

Le signal $u(n)$ est constitué de deux composantes à deux échelles (fréquences) différentes, que le découpage en sous-bande permet de clairement isoler. En effet, la figure (1.11) montre l'allure temporelle des signaux issus des 1^{ère} et 15^{ème} sous-bandes d'un banc de filtres uniforme à $M = 64$ sous-bandes. Les fréquences f_1 et f_2 se trouvent précisément au centre de ces sous-bandes et on peut bien observer séparément les deux composantes présentes dans le signal $u(n)$. On voit que ces deux composantes sinusoidales conservent leurs amplitudes respectives (soit 1 et 0.1) et que leurs fréquences sont toutes les deux ramenées à 0.25 (car Mf_1 et Mf_2 sont congrues

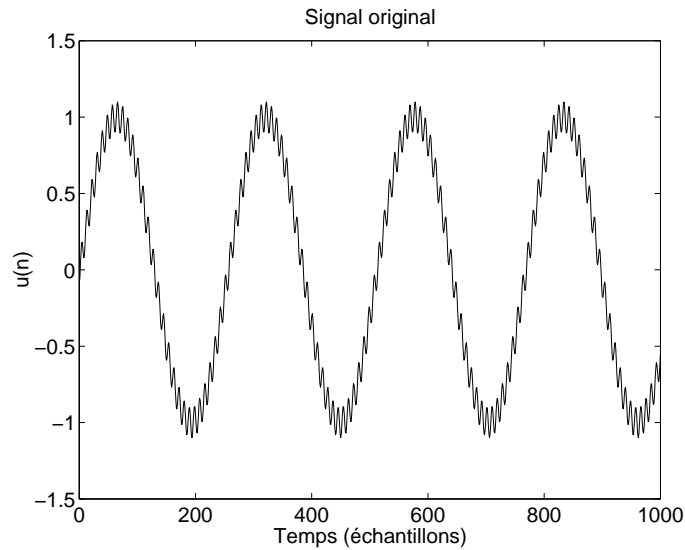


FIG. 1.10 – Signal original.

à 0.25 modulo 1).

1.3.3 La transformée de Fourier glissante et le découpage en sous-bandes

Définition

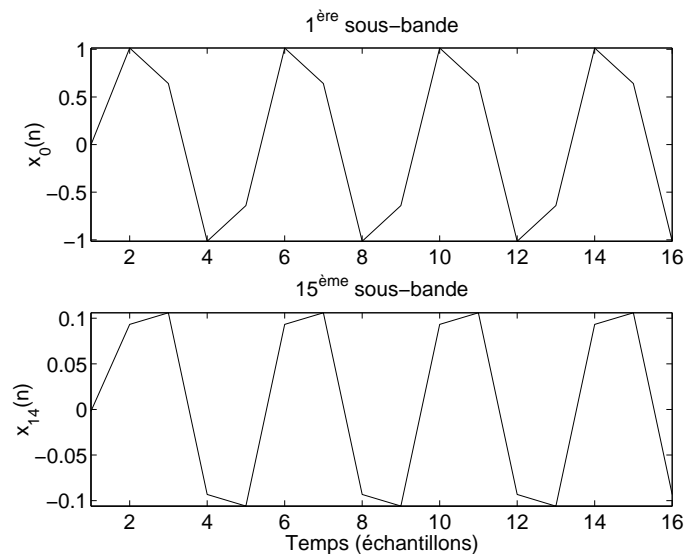
La transformée de Fourier glissante est la méthode d'analyse spectrale temps-fréquence la plus ancienne, directement dérivée de la transformée de Fourier classique.

Dans la transformée de Fourier à court terme, le signal $x(n)$ est multiplié par une fenêtre $v(n)$ de faible support temporel par rapport à la longueur du signal. La transformée de Fourier classique est alors calculée sur le produit $x(n)v(n - m)$ où K représente la quantité par laquelle on a fait glisser la fenêtre $v(n)$ sur le signal $x(n)$.

On obtient ainsi la définition de la STFT (Short Time Fourier Transform) :

$$X_{STFT}(e^{i2\pi f}, m) \stackrel{def}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)v(n - m)e^{-i2\pi f n} \quad (1.28)$$

Cette définition peut se discrétiser en fréquence en choisissant δ_f petit et en évaluant X_{STFT} tous les $k\delta_f, k \in \mathbb{Z}$. On obtient alors :

FIG. 1.11 – Signaux issus des 1^{ère} et 15^{ème} sous-bandes.

$$X_{STFT}(k, m) \stackrel{def}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)v(n-m)e^{-i2\pi k\delta_f n} \quad (1.29)$$

Sur la figure (1.12) est donnée une visualisation de ce type d'approche.

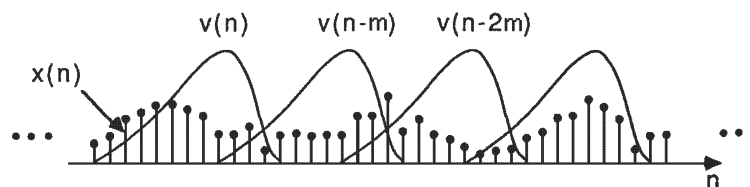


FIG. 1.12 – Approche par fenêtre glissante.

On peut noter qu'étant donné la simplicité de sa mise en œuvre et la faible puissance de calcul qu'elle consomme, c'est probablement la méthode la plus utilisée de nos jours pour l'analyse temps-fréquence.

Interprétation sous forme de banc de filtre

La transformée de Fourier glissante peut être interprétée sous forme d'un banc de filtres uniforme (voir [20]) comme le montre la figure (1.13).

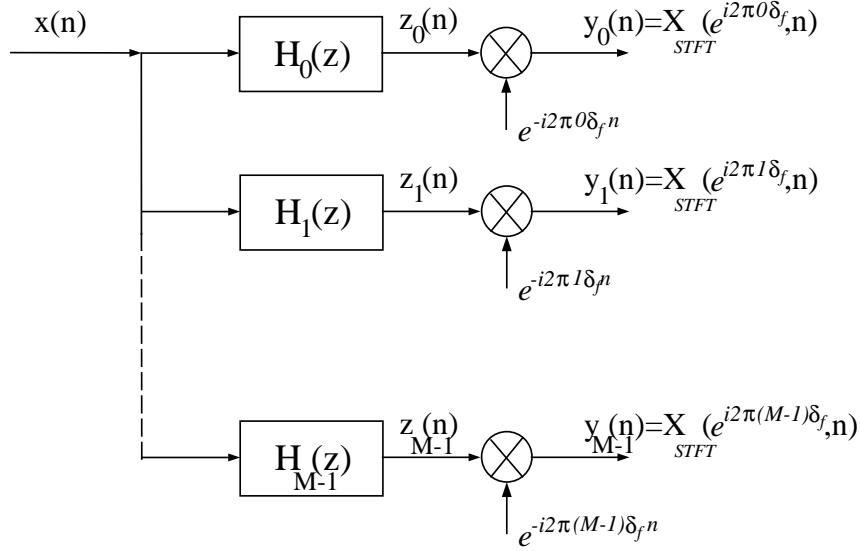


FIG. 1.13 – Banc de filtres équivalent à la transformée de Fourier glissante.

Une représentation de la transmittance de chacun des filtres $H_0(z)$, $H_1(z)$, ..., $H_{M-1}(z)$ est donnée sur la figure (1.14).

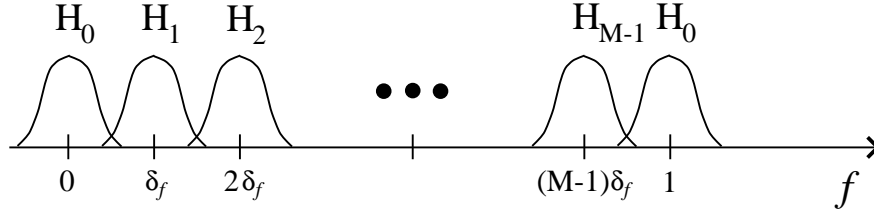


FIG. 1.14 – Transmittance des filtres.

Il convient de noter ici que le banc de filtre est très particulier. En plus d'être uniforme, chaque filtre $H_k(z)$ correspond à la translation fréquentielle d'un même filtre $H(e^{i2\pi f}) = V(e^{-i2\pi f})$ par la quantité $k\delta_f$ où $V(e^{i2\pi f})$ représente la transformée de Fourier Discrète de la fenêtre glissante. En effet, si on écrit la sortie de la $k^{\text{ème}}$ sous-bande à l'instant m , on obtient :

$$\begin{aligned} y_k(m) &= z_k(m)e^{-i2\pi k\delta_f m} \\ &= (h_k * x)(m)e^{-i2\pi k\delta_f m} \end{aligned} \quad (1.30)$$

or, $H_k(e^{i2\pi f}) = V(e^{-i2\pi(f-k\delta_f)})$ donc $h_k(n) = v(-n)e^{i2\pi k\delta_f n}$, d'où :

$$\begin{aligned}
y_k(m) &= \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)h_k(m-n) \right) e^{-i2\pi k\delta_f m} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)v(n-m)e^{i2\pi k\delta_f(m-n)} e^{-i2\pi k\delta_f m} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)v(n-m)e^{-i2\pi k\delta_f n} \\
&= X_{STFT}(k, m)
\end{aligned} \tag{1.31}$$

Toutefois, l'avènement de la transformée en ondelettes discrète dans la littérature du traitement du signal et des images des années 80 offre une alternative intéressante à la transformée de Fourier glissante.

1.3.4 La transformée en ondelettes discrète dyadique et le découpage en sous-bandes

Définition

Si on se place dans le cas dyadique, la transformée en ondelettes discrète (TO) peut être définie comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_k(n) \stackrel{def}{=} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h_k(2^{k+1}n - m), \quad k \leq M - 2 \\ y_{M-1}(n) \stackrel{def}{=} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h_{M-1}(2^{M-1}n - m) \end{array} \right. \tag{1.32}$$

Interprétation sous forme de banc de filtres

On peut interpréter la transformée en ondelettes discrète par le schéma présenté figure (1.15) ou de façon équivalente par le schéma condensé figure (1.16) où les filtres $H_1(z)$, $H_2(z)$, $H_3(z)$ et $H_4(z)$ peuvent s'exprimer en fonction de $H(z)$ et $G(z)$.

Si on veut comparer la TO à la TF glissante à travers leurs interprétations respectives sous forme de bancs de filtres, il est intéressant de noter que dans la TO discrète dyadique, les filtres impliqués ont des transmittances très différentes de celles des filtres de Fourier glissant, comme l'indique la figure (1.17).

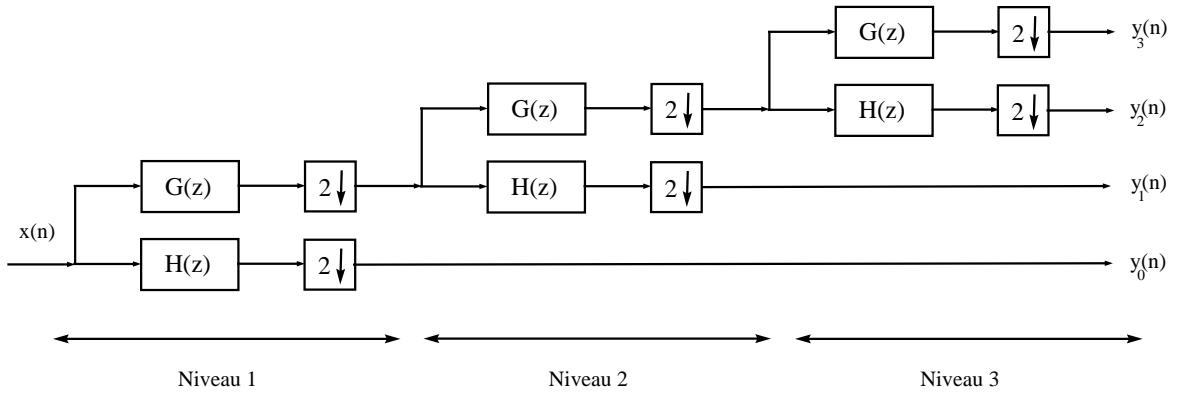


FIG. 1.15 – Banc de filtres équivalent de la transformée en ondelettes dyadique (a).

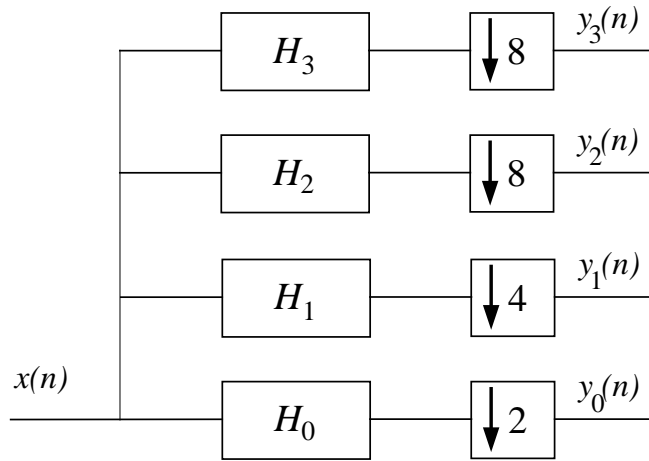


FIG. 1.16 – Banc de filtres équivalent de la transformée en ondelettes dyadique (b).

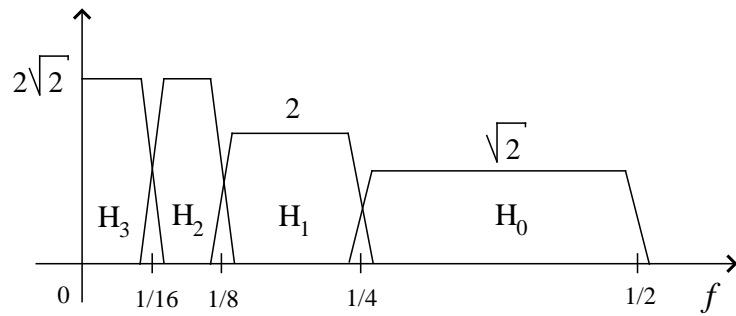


FIG. 1.17 – Filtrés de la transformée en ondelettes dyadique.

Remarque : On peut vérifier qu'en définissant la fréquence centrale de chaque filtre comme la moyenne géométrique des deux bornes, le facteur $Q \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{Fréquence Centrale}}{\text{Bande Passante}}$ est indépendant de l'indice k du filtre :

$$Q = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2^k} \cdot \frac{\pi}{2^{k+1}}}}{\frac{\pi}{2^k} - \frac{\pi}{2^{k+1}}} = \frac{\pi \cdot 2^{-k} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{2^{-k} \frac{\pi}{2}} = \sqrt{2} \quad (1.33)$$

En termes de filtrage analogique, la quantité Q est appelée *facteur de qualité* et un tel système est appelé "système à Q constant" (voir [22]).

1.3.5 Le dilemme temps-fréquence

Si le découpage en sous-bandes permet de mieux isoler les composantes fréquentielles d'un signal, il ne peut échapper au dilemme temps-fréquence. On sait que si le support temporel d'un signal est "étroit", alors le support fréquentiel de sa transformée de Fourier est "large" et réciproquement. Ceci exprime de manière élémentaire le dilemme temps-fréquence et signifie qu'il y aura toujours un compromis entre localisation temporelle et résolution fréquentielle.

De façon à préciser cette notion nous allons définir deux quantités positives appelées durées RMS (Root Mean Square) en domaine temporel et domaine fréquentiel d'un signal $v(t)$.

$$D_t^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 v^2(t) dt, \quad D_f^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 |V(f)|^2 df \quad (1.34)$$

où E est l'énergie du signal.

Ces quantités ont été introduites dans la littérature par [23] et [24] et permettent de démontrer le principe d'incertitude suivant (à rapprocher du principe de Heisenberg en mécanique quantique démontrant que l'on ne peut connaître avec précision à la fois la vitesse et la position d'une particule) :

$$\boxed{D_t D_f \geq \frac{1}{4\pi}} \text{ avec égalité si et seulement si } v(t) = Ae^{-\alpha t^2}, \alpha > 0 \quad (1.35)$$

Comme le montre l'équation (1.35), la fenêtre temporelle optimale de pondération est gaussienne et sa durée au sens traditionnel est infinie. Une visualisation de ce phénomène est donnée sur la figure (1.18).

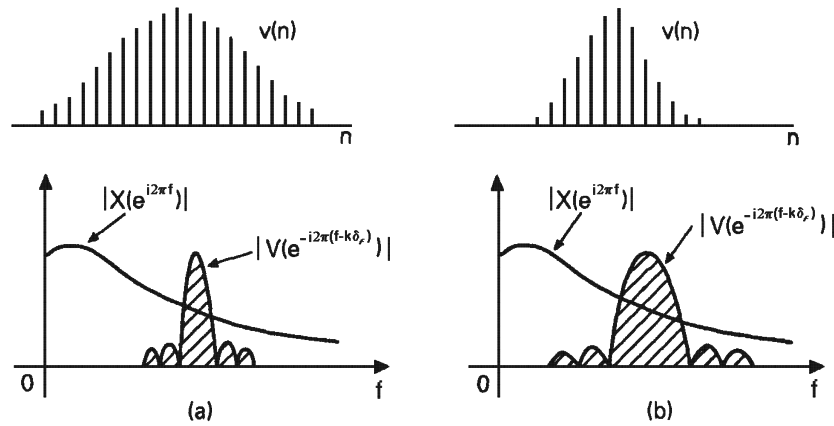


FIG. 1.18 – Localisation temporelle et localisation fréquentielle.

On se rend bien compte ici que plus la fenêtre est étroite dans le domaine temporel (donc meilleure est la localisation temporelle), plus la largeur des lobes dans le domaine fréquentiel augmente (donc plus la résolution fréquentielle diminue).

1.3.6 Avantages de la TO par rapport à la TF glissante

La représentation unifiée que procure l'écriture de ces deux transformées sous la forme d'un banc de filtres permet de les comparer plus facilement.

La transformée en ondelettes, de même que la transformée de Fourier à court terme, est bien évidemment soumise au principe de Gabor. Néanmoins, elle présente un avantage primordial. En effet, les figures (1.13) et (1.16) montrent bien que ces 2 méthodes peuvent bien s'interpréter comme un banc de filtres. Mais dans le cas de la transformée en ondelettes, il s'agit d'un banc non uniforme et qui fait apparaître des blocs de décimation, ce qui permet d'obtenir un découpage non uniforme du plan temps-fréquence.

Pour comprendre l'intérêt d'un tel découpage, considérons les deux cas présentés figure (1.19.a) et (1.19.b) où on applique la même fenêtre à deux signaux différents.

On s'aperçoit ici que dans le premier cas où le signal est "haute fréquence", plusieurs périodes sont capturées par la fenêtre. Mais dans le cas d'un signal "basse fréquence", on voit que le support temporel de la fenêtre n'est pas suffisant. On a

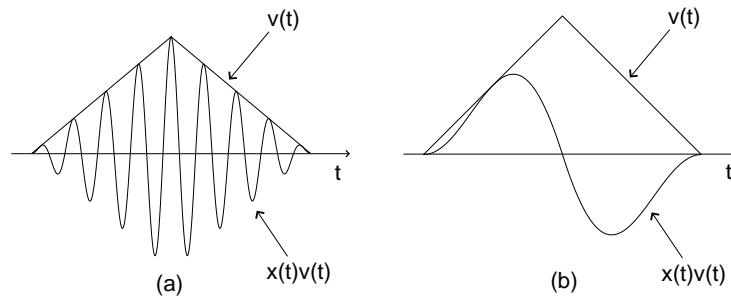


FIG. 1.19 – Cas de signaux basse et haute fréquence avec la même fenêtre.

donc intérêt à utiliser pour les basses fréquences une fenêtre de large support temporel (i.e. de faible largeur de bande dans le domaine spectral) alors que pour les hautes fréquences, on peut se permettre d'utiliser une fenêtre de grande largeur de bande en fréquentiel et ainsi gagner en localisation temporelle.

C'est ce que fait la transformée en ondelettes en utilisant un banc de filtres non uniforme et des blocs de décimation. On peut observer figure (1.20) le pavage du plan de la transformée de Fourier glissante (a) et de la transformée en ondelettes dyadique (b).

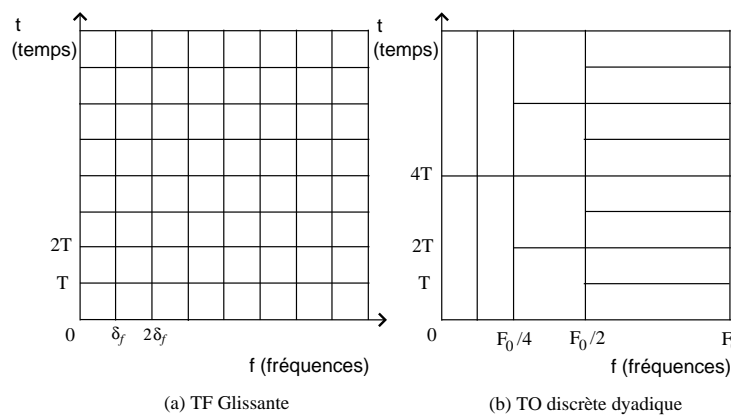


FIG. 1.20 – Pavage du plan temps-fréquence.

Ce pavage non uniforme du plan temps-fréquence est un avantage important de la transformée en ondelettes discrète dyadique par rapport à la transformée de Fourier glissante.

Chapitre 2

Analyse spectrale dans les sous-bandes

2.1 Introduction

Le découpage en sous-bandes a été utilisée avec succès dans diverses applications de traitement du signal et des images comme le codage audio, la compression d'images et de vidéo [25], [26]. Des auteurs ont récemment démontré la puissance du découpage en sous-bandes pour l'estimation spectrale [27], [28]. Plus précisément, on montre que les performances d'une estimation spectrale traditionnelle peuvent augmenter si celle-ci est appliquée sur les signaux décimés issus d'un banc de filtres approprié déterminant la décomposition en sous-bandes plutôt que sur le signal original "large-bande".

Bien sûr, cette amélioration n'est pas assurée a priori et va dépendre des caractéristiques du signal à analyser. Dans ce chapitre, on va passer en revue les différents avantages et inconvénients de l'analyse spectrale paramétrique dans les sous-bandes en considérant différents critères très importants pour juger de la qualité d'une estimation spectrale. La raison pour laquelle on choisit de préférence des méthodes d'analyse spectrale paramétriques dans les sous-bandes plutôt que des méthodes à base de transformée de Fourier réside dans la décimation des signaux qui provoque une diminution du nombre d'échantillons disponibles (voir partie 1.2.5). Bien sûr, ceci est à mettre en balance avec l'augmentation éventuelle du SNR qui va au contraire

avoir tendance à augmenter le nombre limite d'échantillons N_0 (voir partie 2.3.2) en deçà duquel il devient préférable d'utiliser des modélisations paramétriques. Notons enfin que pour chacun de ces critères, on fera la distinction entre le cas théorique (où les filtres d'analyse sont tous des passe-bande idéaux) et le cas pratique de filtres réels possédant une bande de transition de largeur non nulle.

Plusieurs avantages peuvent être mis en avant dans l'utilisation de l'analyse spectrale paramétrique appliquée aux signaux issus des sous-bandes plutôt qu'au signal original. Ces avantages concernent l'ordre des modèles, la résolution linéaire, le blanchiment des spectres, le rapport signal à bruit local et le nombre de conditionnement des matrices d'autocorrélation. Le reste de ce chapitre est destiné à passer en revue les différents avantages ou inconvénients de l'analyse spectrale par modélisations paramétriques dans les sous-bandes, plutôt que sur le signal original.

2.2 Avantages liés à l'ordre des modèles

2.2.1 Réduction de l'ordre des modèles

Commençons par remarquer que, quelque soit le type de modélisation paramétrique envisagée, et même dans l'hypothèse d'un banc de filtres idéal (dans lequel les filtres d'analyse sont tous des passe-bandes de réponse fréquentielle parfaitement rectangulaire), la réduction de l'ordre des modèles n'est pas assurée a priori et dépend du signal à analyser $u(n)$. Dans le cas général, le modèle théorique des signaux de sous-bande $x_j(n)$ ne sera pas le même que le modèle du signal $u(n)$. Afin d'illustrer ceci, supposons que le signal original d'intérêt $u(n)$ a une densité spectrale de puissance telle que celle représentée figure (2.1.a) et le banc de filtres utilisé correspond au schéma de la figure (1.8). Par exemple, on considère un banc à $M = 4$ sous-bandes et on s'intéresse au signal issu de la 3^{ème} sous-bande ($j = 2$). La figure (2.1.b) montre les différentes versions décalées de $H_2(e^{-i2\pi(f-\frac{k}{M})})$ et $U(e^{-i2\pi(f-\frac{k}{M})})$ pour $k = 0, 1, 2, 3$. Enfin, la figure (2.1.c) montre la densité spectrale de puissance de $x_2(n)$.

Cet exemple tend à à illustrer que, dans la majorité des cas, la modélisation du

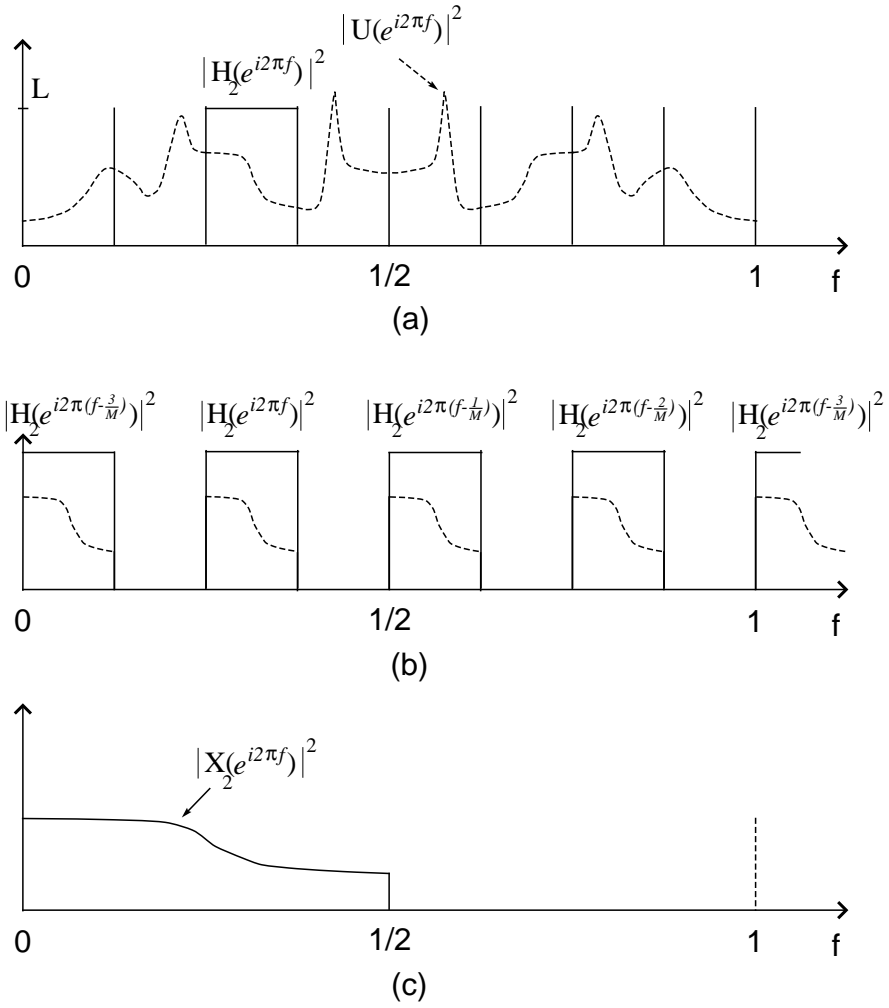


FIG. 2.1 – Effet du découpage en sous-bandes sur l'ordre des modèles.

signal original doit se faire avec un ordre de modélisation plus important que celui requis pour la modélisation des signaux issus des sous-bandes. Ceci peut s'expliquer simplement par le fait qu'a priori, le signal original est plus riche d'un point de vue spectral que chacun des signaux issus des sous-bandes.

Toutefois, faire l'hypothèse d'un certain modèle pour $u(n)$ revient à faire l'hypothèse que sa densité spectrale de puissance a certaines caractéristiques - par exemple dire que $u(n)$ est un processus ARMA (Auto-Regressive, Moving Average : processus Auto-Régressif à Moyenne Mobile) revient à dire qu'elle peut s'approcher par une fraction rationnelle. Ainsi, dans le cas où $u(n)$ est un véritable signal ARMA, sa densité spectrale de puissance s'exprime exactement comme une fraction rationnelle. Le découpage en sous-bande (même dans le cas de filtres idéaux) va alors produire des signaux de sous-bande qui ne seront plus de véritables ARMA et qui nécessiteront donc un ordre théoriquement infini si on les modélise comme tels. Dans ce cas-là, l'ordre de modélisation nécessaire pour les signaux de sous-bandes serait supérieur à celui utilisé pour la modélisation du signal original.

Dans le cas particulier où $u(n)$ est une somme finie d'exponentielles complexes, et dans l'hypothèse d'un banc de filtres idéal, les filtres d'analyse vont permettre d'isoler certaines composantes harmoniques (celles qui appartiennent à SB_j), et l'ordre théorique de modélisation AR est justement égal au nombre de ces composantes harmoniques. Ceci permet donc sous ces hypothèses de démontrer la diminution de l'ordre pour les signaux de sous-bandes.

Quoi qu'il en soit, il faut noter que dans les applications réelles, la diminution de l'ordre des modèles est souvent le résultat de la connaissance d'un nombre fini d'échantillons. En effet, si on veut modéliser le signal $u(n)$ dont on connaît N échantillons avec un ordre maximal possible p de l'ordre de $0.75N$ (voir [17]) pour avoir la meilleure résolution spectrale possible, par exemple, l'ordre maximal dans les sous-bandes sera autour de $p_{sub} = p/M$ à cause du nombre M fois plus faible d'échantillons disponibles dans les sous-bandes.

2.2.2 Nombre de conditionnement des matrices d'autocorrélation

Les résultats de l'analyse préliminaire effectuée partie 1.2.5 font pencher pour l'utilisation de l'analyse spectrale paramétrique plutôt que l'analyse spectrale classique pour l'analyse des signaux issus des différentes sous-bandes. Comme indiqué dans la partie 1.2.4, il est important de noter que pratiquement toutes ces méthodes reposent sur l'obtention d'une estimation de la matrice d'autocorrélation définie pour un signal $u(n)$ par :

$$R_u = \begin{pmatrix} r_u(0) & r_u(-1) & \dots & r_u(-(p-1)) \\ r_u(1) & r_u(0) & & \\ \cdot & & \cdot & \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \\ r_u(p-1) & & & r_u(0) \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

où $r_u(k) = E[u(n)u^*(n-k)]$ est l'autocorrélation du signal $u(n)$.

La précision numérique des algorithmes destinés à calculer les paramètres du modèle à partir d'une estimation de la matrice R_u est liée à son nombre de conditionnement défini par (voir par exemple [29]) :

$$\mathcal{C}_{R_u} = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \quad (2.2)$$

où λ_{max} et λ_{min} sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur propre de la matrice R_u (toutes les valeurs propres sont forcément positives ou nulles, étant donnée que la matrice est à symétrie hermitienne et définie positive).

Le nombre de conditionnement est par définition supérieur ou égal à 1 et représente une mesure de la stabilité numérique d'un système d'équations matriciel de la forme $Ax = b$. Plus précisément, avoir un nombre de conditionnement \mathcal{C}_A "grand", signifie qu'une faible perturbation du vecteur b va provoquer une très grande variation sur le résultat x de la résolution du système et inversement pour un nombre de conditionnement proche de 1. On comprend donc l'intérêt d'avoir des systèmes d'équations

bien conditionnés, c'est-à-dire avec un faible nombre de conditionnement.

La réduction du nombre de conditionnement des matrices d'autocorrélation R_{x_j} des signaux de sous-bande par rapport à celui de la matrice R_u du signal original est une conséquence directe de la réduction de l'ordre des modèles dans les sous-bandes (voir partie 2.2.1). Une première façon de le voir passe par le théorème d'entrelacement des valeurs propres :

Considérons les matrices d'autocorrélation R_p et R_{p-1} de tailles respectives $p \times p$ et $(p-1) \times (p-1)$ telles que :

$$\begin{aligned} - R_p &= \begin{bmatrix} r_x(0) & \underline{r}_x^H \\ \underline{r}_x & R_{p-1} \end{bmatrix} \\ - R_{p-1}^H &= R_{p-1} \end{aligned}$$

Soient $\eta_1 \geq \eta_2 \geq \dots \geq \eta_{p-1}$ les $p-1$ valeurs propres ordonnées de la matrice R_{p-1} . Alors, les p valeurs propres ordonnées λ_k de la matrice R_p vérifient :

$$\lambda_1 \geq \eta_1 \geq \lambda_2 \geq \eta_2 \geq \dots \geq \eta_{p-1} \geq \lambda_p \quad (2.3)$$

Une démonstration de ce théorème est donnée dans [30]. De ce théorème, on déduit directement que :

$$\boxed{\mathcal{C}_{R_{p-1}} \leq \mathcal{C}_{R_p}} \quad (2.4)$$

Une deuxième façon de vérifier la réduction du nombre de conditionnement de la matrice d'autocorrélation dans les sous-bandes s'appuie sur la distribution asymptotique ($p \rightarrow \infty$) des valeurs propres de R_u : dans [31], on démontre l'équivalence suivante :

$$\text{en } p = +\infty, \lambda_k \sim \sum_{n=-(p-1)}^{p-1} r_u(n) e^{-i2\pi \frac{k}{p} n}, k = 0, 1, \dots, p-1 \quad (2.5)$$

On reconnaît l'expression du corrélogramme, ce qui permet d'envisager d'estimer λ_{max} et λ_{min} comme étant respectivement les valeurs maximale et minimale de la densité spectrale de puissance. En suivant le même raisonnement que dans la partie 2.2.1 et en considérant un banc de filtres idéaux, on en déduit le même résultat.

2.3 Avantages liés au filtrage et à la décimation

2.3.1 Résolution fréquentielle linéaire

De même que dans [32], on appellera *résolution linéaire* d'un estimateur spectral la distance minimale entre 2 harmoniques à partir de laquelle on ne "voit" plus qu'un seul pic. Comme on l'a montré précédemment, la transformée de Fourier du signal original $u(n)$ en f s'exprime en fonction de la transformée de Fourier des signaux de sous-bande $x_j(n)$ en Mf si on utilise un banc uniforme à M sous-bandes (voir équation (1.27), page 19). De nombreux auteurs ont démontré qu'un tel banc de filtres associé à une décimation par le même facteur permettait d'augmenter la résolution linéaire d'un facteur M . (voir en particulier [32]). Il faut bien préciser que ceci n'a rien à voir avec le fait d'avoir des filtres idéaux ou non, mais est simplement lié à l'opération de décimation qui a tendance à "étaier" la densité spectrale de puissance. En effet, considérons le cas où le signal d'entrée $u(n)$ est composé d'une somme de 2 harmoniques très proches de fréquences respectives f_p et f_q . Si ces 2 fréquences appartiennent toutes deux à la même sous-bande SB_j , l'écart $\Delta f = f_q - f_p$ entre les 2 pics du signal d'entrée $u(n)$ va se transformer en $M\Delta f = Mf_q - Mf_p$ sur le signal issu de la $j^{\text{ème}}$ sous-bande, $x_j(n)$.

Mais il y a plusieurs réserves à émettre à propos de ce raisonnement. D'abord, dans le cas d'un banc de filtres ayant une très large bande de transition, comme c'est le cas des filtres-peigne (voir partie 3.2.2) qui sont déjà utilisés dans le domaine du découpage en sous-bandes (voir [21], p.227 et [33]), il existe des cas où on peut obtenir l'effet inverse de celui escompté : rapprocher des harmoniques présents sur le signal $u(n)$ au lieu de les éloigner, à cause de l'apparition des pics secondaires dus au recouvrement spectral. Afin d'illustrer ceci, considérons le cas d'un banc de filtres uniforme avec $M = 4$ sous-bandes. Ainsi qu'indiqué sur la figure (2.2), le signal d'entrée $u(n)$ contient 2 harmoniques proches dans la 1^{ère} sous-bande de fréquences $f_1 = 0.02$ et $f_2 = 0.04$, ainsi qu'un harmonique au tout début de la 3^{ème} sous-bande, à $f_3 = 0.2675$. Le banc de filtres utilisé est un banc de filtres-peigne d'ordre très faible $L = M = 4$ (donc ayant une très large bande de transition qui va permettre

de mettre en évidence les effets du recouvrement spectral) et on a représenté le filtre correspondant à la 1^{ère} sous-bande sur la figure (2.2).

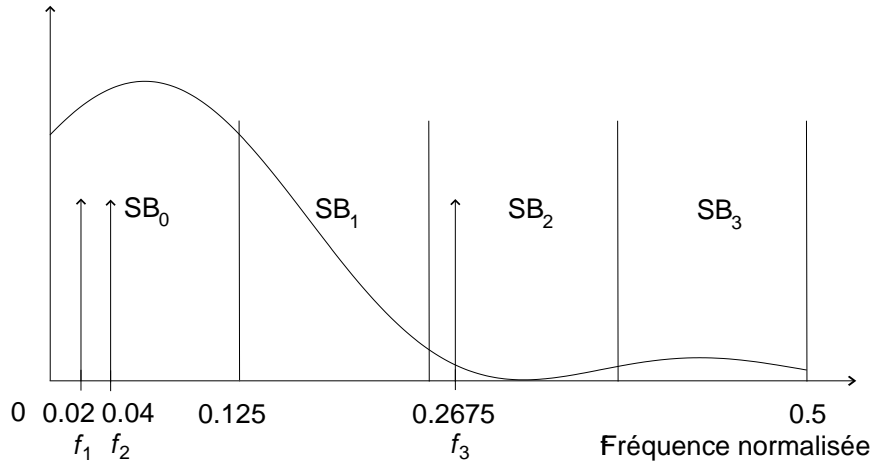


FIG. 2.2 – Découpage en sous-bandes et résolution linéaire.

Comme les filtres d'analyse ne sont pas idéaux, les signaux issus de la 1^{ère} sous-bande vont contenir des harmoniques aux fréquences $Mf_1 = 0.08$, $Mf_2 = 0.16$ et $Mf_3 = 1.07$. Étant donné la périodicité 1 des $X_{1,m}(e^{i2\pi f})$, ce troisième harmonique va donc apparaître en 0.07 et on aura donc des harmoniques Mf_3 et Mf_1 distants de 0.01, soit encore plus proches que les harmoniques de fréquences f_1 et f_2 présents sur le signal original.

Ensuite, on peut remarquer que même si la résolution linéaire augmente théoriquement d'un facteur M , on a en pratique une diminution d'un même facteur du nombre d'échantillons disponibles, de sorte qu'il n'y a aucun changement du point de vue du principe d'incertitude d'Heisenberg-Gabor (voir partie 1.3.5) car on augmente D_f^2 d'un facteur M tout en diminuant D_t^2 du même facteur.

2.3.2 Rapport Signal à Bruit local

Dans cette partie, on se place dans le cadre de l'étude d'un processus aléatoire $u(n)$ constitué d'une somme de K exponentielles complexes non amorties noyées dans

un bruit blanc $b(n)$:

$$u(n) = \sum_{l=0}^K A_l e^{i(2\pi f_l n + \phi_l)} + b(n) \quad (2.6)$$

où $b(n)$ est un bruit blanc centré de variance σ_b^2 et les phases ϕ_l sont toutes indépendantes et uniformément réparties sur $[0, 2\pi]$. Son autocorrélation est alors théoriquement égale à :

$$r_u(k) = \sum_{l=0}^K A_l^2 e^{i2\pi f_l k} + \sigma_b^2 \delta(k) \quad (2.7)$$

où $\delta(k)$ est le symbole de Kronecker : $\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

On définit le *SNR local* du signal $u(n)$ pour la composante l en posant :

$$SNR_{l,u} = \frac{A_l^2}{\sigma_b^2} \quad (2.8)$$

Ce rapport signal à bruit local est une bonne indication de la possibilité ou non d'estimer la fréquence f_l correctement et on peut remarquer au passage que le rapport Signal à Bruit global SNR_u du signal $u(n)$ est égal à la somme des *SNR* locaux : $SNR_u = \sum_{l=0}^K SNR_{l,u}$. Si on utilise un banc de filtres idéaux mais pas forcément uniforme tel que celui représenté figure (2.3), l'autocorrélation du signal issu de la $j^{\text{ème}}$ sous-bande est :

$$r_{x_j}(k) = \sum_{f_l \in SB_j} (m_j A_l^2) e^{i2\pi f_l k} + \sigma_b^2 \delta(k) \quad (2.9)$$

Cela permet de voir que le *SNR* local associé à la $l^{\text{ème}}$ composante fréquentielle est multiplié par un facteur m_j dans les sous-bandes :

$$SNR_{l,x_j} = \frac{m_j A_l^2}{\sigma_b^2} = m_j SNR_{l,u} \quad (2.10)$$

2.3.3 Blanchiment de la densité spectrale de puissance

Afin de définir la "blancheur" d'une densité spectrale de puissance, on peut utiliser un critère de platitude spectrale d'un processus aléatoire $u(n)$, de densité spectrale

de puissance $S_u(f)$ défini par :

$$\mathcal{F}_u^{(1)} = \frac{\min_{f \in [0,1]} S_u(f)}{\max_{f \in [0,1]} S_u(f)} \quad (2.11)$$

A noter que dans le cas asymptotique ($p \rightarrow +\infty$), le théorème de Szegö permet de relier cette mesure au nombre de conditionnement \mathcal{C}_{R_u} de la matrice d'autocorrélation défini dans la partie 2.2.2 :

$$\mathcal{C}_{R_u} = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \simeq \frac{\max_{f \in [0,1]} S_u(f)}{\min_{f \in [0,1]} S_u(f)} \quad (2.12)$$

d'où, pour $p \rightarrow +\infty$:

$$\mathcal{F}_u^{(1)} \simeq \frac{1}{\mathcal{C}_{R_u}} \quad (2.13)$$

Cette mesure de platitude de la densité spectrale de puissance permet de démontrer très facilement que la DSP des signaux de sous-bandes est toujours plus plate (au sens de ce critère) que la DSP du signal original $u(n)$, du moins si on se place dans le cas de filtres idéaux. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \min_{f \in SB_j} S_u(f) &\geq \min_{f \in [0,1]} S_u(f) \\ \text{et } \max_{f \in SB_j} S_u(f) &\leq \max_{f \in [0,1]} S_u(f) \end{aligned} \quad (2.14)$$

donc

$$\frac{\min_{f \in SB_j} S_u(f)}{\max_{f \in SB_j} S_u(f)} \geq \frac{\min_{f \in [0,1]} S_u(f)}{\max_{f \in [0,1]} S_u(f)} \quad (2.15)$$

d'où :

$$\boxed{\mathcal{F}_{x_j}^{(1)} \geq \mathcal{F}_u^{(1)}} \quad (2.16)$$

Lorsque le processus $u(n)$ respecte la condition de Paley-Wiener ($\int_{-1/2}^{1/2} |\log S_u(f)| df < \infty$) (voir [34]), on définit une mesure plus réaliste de la platitude de la densité spectrale de puissance (voir [35]) en posant :

$$\mathcal{F}_u^{(2)} = \frac{\exp \left[\int_{-1/2}^{1/2} \ln S_u(f) df \right]}{\sigma_u^2} \quad (2.17)$$

où σ_u^2 est la variance de $u(n)$. Ce critère correspond au rapport de la moyenne géométrique sur la moyenne arithmétique de la densité spectrale de puissance. De même que le critère précédent, on a $0 \leq \mathcal{F}_u^{(2)} \leq 1$ avec égalité à 1 si et seulement si la densité spectrale de puissance de $u(n)$ est “plate” (c’est-à-dire constante). Même dans le cas d’un banc de filtres non uniforme tel que celui de la figure (1.7), il suffit de rajouter deux hypothèses afin de démontrer (voir [32]) que la moyenne géométrique des mesures de platitude des sous-bandes est toujours supérieure à celle du signal original $u(n)$:

- $\sum_{j=0}^{M-1} \frac{1}{m_j} = 1$ (i.e. le banc de filtres est maximalelement décimé).
- $\forall f, \sum_{j=0}^{M-1} \frac{|H_j(e^{i2\pi f})|^2}{m_k} = 1$ (i.e. les filtres sont complémentaires en puissance).

Les bancs de filtres idéaux uniformes ou non uniformes respectent bien sûr ces deux conditions et un exemple pour $M = 4$ avec $m_0 = m_1 = 8$, $m_2 = 4$ et $m_3 = 2$ est donné figure (2.3).

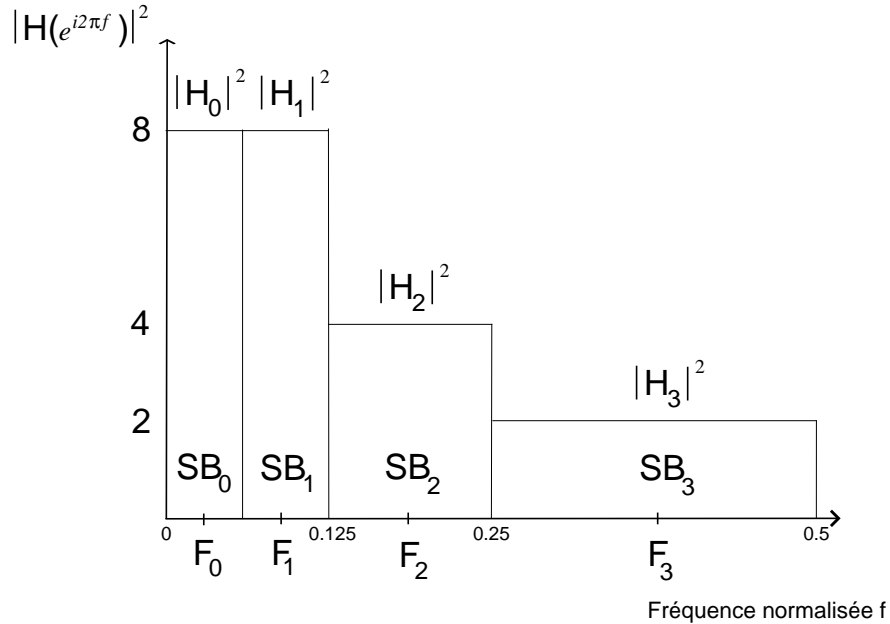


FIG. 2.3 – Banc de filtres maximalelement décimé, complémentaire en puissance, non uniforme.

Sous ces conditions, on a alors :

$$\prod_{j=0}^{M-1} \left(\mathcal{F}_{x_j}^{(2)} \right)^{\frac{1}{m_j}} \geq \mathcal{F}_u^{(2)} \quad (2.18)$$

ce qui prouve que les signaux de sous-bande sont, en moyenne géométrique plus blancs que le signal original. Cela représente un avantage du découpage en sous-bandes pour l'analyse spectrale paramétrique puisque l'ordre de modélisation AR et le nombre de conditionnement des matrices d'autocorrélation s'en trouveront réduits.

2.3.4 Erreur de prédiction linéaire

Dans cette section, on suppose que le signal à analyser $u(n)$ est un véritable signal AR d'ordre q . Dans un récent article (voir [27]), S. Rao et W.A. Pearlman ont démontré que lorsqu'on utilise le même ordre p de modélisation AR sur la source $u(n)$ et les signaux de sous-bande $x_j(n)$, la somme des puissances des erreurs de prédiction linéaire dans les sous-bandes reste toujours inférieure à la puissance du bruit d'excitation de $u(n)$ du moment que $p \leq q$. De plus, l'égalité est atteinte si et seulement si la source $u(n)$ est blanche. Plus précisément, on suppose que le signal $AR(q)$ $u(n)$, vérifiant la récurrence temporelle :

$$u(n) = - \sum_{k=0}^q a_k u(n-k) + e_q(n) \quad (2.19)$$

est placé à l'entrée d'un banc de filtres quelconque (pas forcément uniforme), constitué de M filtres idéaux suivis par des décimateurs, tel que celui présenté figure (1.7). L'erreur $e_q(n)$ pour l'ordre q est alors un bruit blanc de puissance $\sigma_{e_q}^2$ et la densité spectrale de puissance de $u(n)$ est :

$$S_u(f) = \frac{\sigma_{e_q}^2}{\left| 1 + \sum_{k=1}^q a_k e^{-i2\pi f k} \right|^2} \quad (2.20)$$

On peut montrer dans ce cas que la densité spectrale de puissance du signal issu de la $j^{\text{ème}}$ sous-bande est selon le cas :

Si j est pair,

$$S_{x_j}(f) = \begin{cases} \frac{L^2}{M^2} S_u\left(\frac{f+j/2}{M}\right) & \text{si } 0 \leq f \leq 0.5 \\ 0 & \text{si } 0.5 \leq f \leq 1 \end{cases} \quad (2.21)$$

Si j est impair,

$$S_{x_j}(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq f \leq 0.5 \\ \frac{L^2}{M^2} S_u\left(\frac{f+(j-1)/2}{M}\right) & \text{si } 0.5 \leq f \leq 1 \end{cases} \quad (2.22)$$

où L est l'amplitude du module au carré de la transmittance du filtre H_j ainsi que représenté figure (1.9), page 20. La figure (2.4) illustre les résultats des équations (2.21) et (2.22).

Suivant le cas, on a donc si j est pair :

$$S_{x_j}(f) = \frac{(L/M)\sigma_{e_q}^2}{\left|1 + \sum_{k=1}^q a_k e^{-i2\pi \frac{f}{M} k} e^{-i\pi \frac{jk}{M}}\right|^2} \quad (2.23)$$

ou si j est impair :

$$S_{x_j}(f) = \frac{(L/M)\sigma_{e_q}^2}{\left|1 + \sum_{k=1}^q a_k e^{-i2\pi \frac{f}{M} k} e^{-i\pi \frac{(j-1)k}{M}}\right|^2} \quad (2.24)$$

Comme Rao et Pearlman le remarquent dans [27], $x_j(n)$ n'est pas un processus AR au sens classique de l'équation (2.19) mais uniquement au sens du filtrage d'un bruit blanc de l'équation(2.20). Il convient de noter que même si le "polynôme" auto-régressif est d'ordre maximal q/M , on a néanmoins besoin de q paramètres pour le décrire.

Supposons maintenant que l'on décide de modéliser à la fois $u(n)$ et les $x_j(n)$ par des processus auto-régressifs d'ordre p . On note $A_u(e^{i2\pi f})$ le polynôme $AR(p)$ associé à $u(n)$ et $A_{x_j}(e^{i2\pi f})$ les polynômes $AR(p)$ associés aux $x_j(n)$. Les puissances des erreurs de prédiction linéaire sont alors définies par :

$$\rho_u = \int_{-1/2}^{1/2} |A_u(e^{i2\pi f})|^2 S_u(f) df \quad (2.25)$$

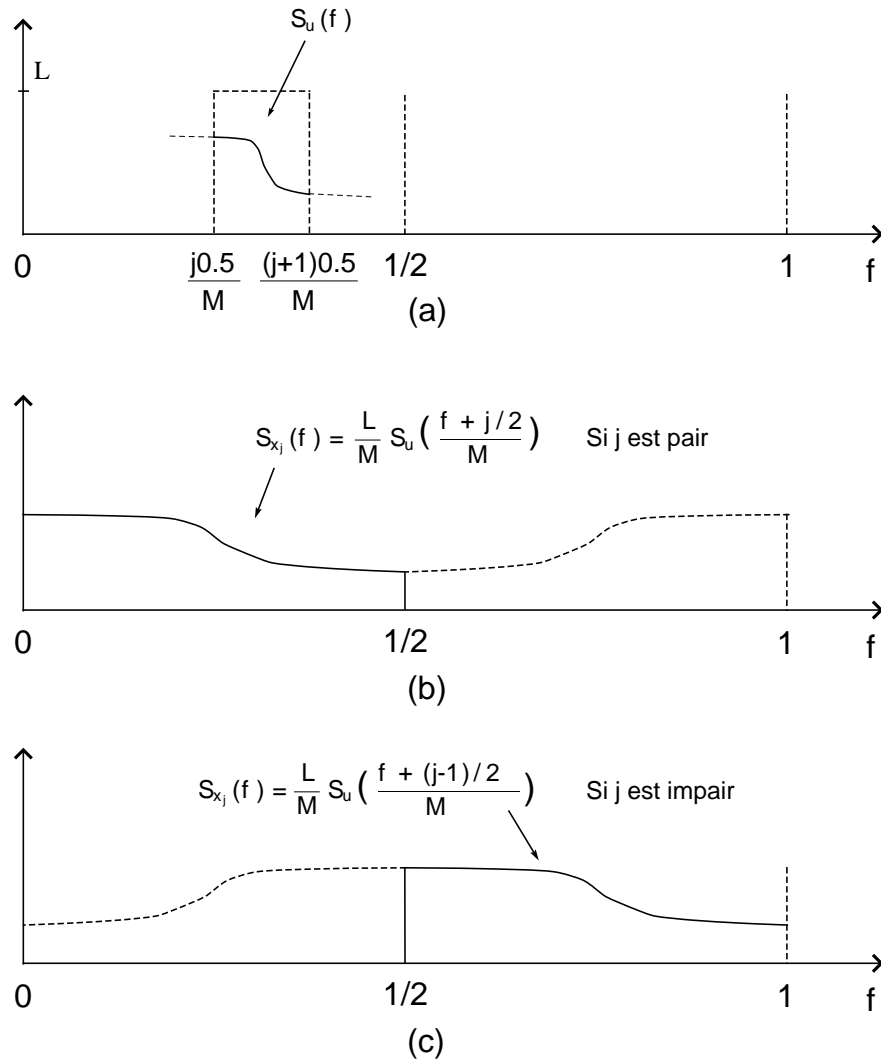


FIG. 2.4 – Densité spectrale de puissance idéale associée à la $j^{\text{ème}}$ sous-bande.

et

$$\rho_{x_j} = \int_{-1/2}^{1/2} |A_{x_j}(e^{i2\pi f})|^2 S_{x_j}(f) df \quad (2.26)$$

Le résultat principal de Rao et Pearlman s'écrit alors comme suit :

$$\text{pour } p \leq q, \quad \rho_u \geq \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} \rho_{x_j} \quad (2.27)$$

avec égalité si et seulement si $u(n)$ est un bruit blanc. Ce résultat montre l'intérêt du découpage en sous-bandes pour l'estimation paramétrique si on considère le critère de la puissance de l'erreur de prédiction linéaire. Dans le cas asymptotique ($M \rightarrow +\infty$), cela signifie que les puissances d'erreur de prédiction linéaire $\rho_{x_j}(M)$ doivent tendre vers 0 $\forall j$ pour que la série reste convergente.

Ce résultat est établi en prenant l'hypothèse de filtres idéaux. Dans le cas pratique de filtres non idéaux, cette propriété peut être remise en cause même si, comme on le verra dans le chapitre 4, elle est souvent réalisée en pratique.

2.4 Inconvénients

2.4.1 Introduction

Tous les avantages du découpage en sous-bandes cités dans la section précédente ne viennent bien sûr pas sans un prix à payer. Il est tentant de penser que plus on augmente le facteur de décimation M et plus on va augmenter la résolution spectrale linéaire, le rapport signal à bruit, diminuer l'ordre des modèles et la puissance de l'erreur de prédiction linéaire pour la modélisation AR . En pratique, ce n'est pas le cas pour deux raisons principales.

D'abord, les autocorrélations doivent être estimées à partir de données issues de mesures et la qualité d'une telle estimation dépend fortement du nombre d'échantillons disponibles pour la réaliser (voir partie 1.2.2).

Ensuite, il faut prendre en compte le fait que les bancs de filtres d'analyse ne sont pas idéaux. Cela va donc entraîner en particulier l'introduction d'un recouvrement

spectral sur les signaux de sous-bandes. Ces deux aspects sont détaillés dans ce qui suit.

2.4.2 Variance des estimateurs d'autocorrélation

Le premier inconvénient du découpage en sous-bandes qui apparaît dans la pratique provient de l'estimation de l'autocorrélation du signal à analyser $u(n)$. En effet, intéressons-nous à l'une des M branches du banc de filtres de la figure (1.8), représentée figure (2.5).

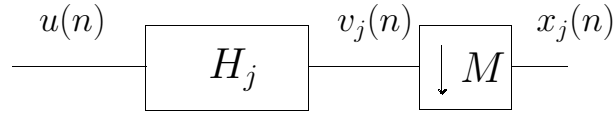


FIG. 2.5 – $j^{\text{ème}}$ branche du banc de filtres.

La décimation par un facteur M du signal $v_j(n)$ peut se faire de M façons différentes, conduisant à M versions possibles de $x_j(n)$. Cette remarque sera utilisée d'une façon particulière dans le chapitre suivant, dans lequel nous proposons deux façons d'utiliser ces M versions pour améliorer l'analyse spectrale. C'est pourquoi, dans la suite, on notera $x_{j,0}(n)$, $x_{j,1}(n)$, ..., $x_{j,M-1}(n)$ les signaux correspondant à ces M sous-séries, tous issus de la même sous-bande j . Comme l'indique la figure (2.6), ils sont définis par :

$$\forall j, m \in [0, \dots, M-1], x_{j,m}(n) = v_j(Mn - m) \quad (2.28)$$

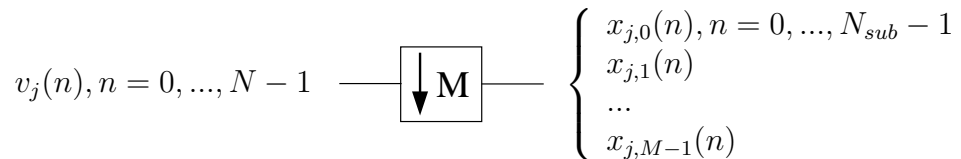


FIG. 2.6 – Décimation d'une série $v_j(n)$ en M sous-séries.

On montre aisément que les sous-séries $x_{j,0}(n)$, $x_{j,1}(n)$, ..., $x_{j,M-1}(n)$ définies par

l'équation (2.28) ont toutes la même autocorrélation :

$$\begin{aligned}
\forall j, m \in [0, \dots, M-1], r_{x_{j,m}}(k) &\stackrel{def}{=} E[x_{j,m}(n)x_{j,m}^*(n-k)] \\
&= E[v_j(Mn-m)v_j^*(M(n-k)-m)] \\
&= E[v_j(n)v_j^*(n-Mk)] \\
&= r_{v_j}(Mk)
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Comme elle est indépendante de m , on notera plus simplement $r_{x_j}(k) = r_{v_j}(Mk)$ cette autocorrélation des sous-séries issues de la $j^{\text{ème}}$ sous-bande.

D'autre part, comme on l'a vu dans la section 1.2.2, la variance des différents estimateurs d'autocorrélation augmente rapidement lorsque le décalage k tend vers le nombre N d'échantillons de signal disponible. Comme l'autocorrélation commune des signaux issus de la $j^{\text{ème}}$ sous-bande pour le décalage k s'écrit en fonction de celle du signal non décimé en Mk : $r_{x_j}(k) = r_{v_j}(Mk)$ (voir équation (2.29)), on en déduit que pour k fixé :

$$Var[\hat{r}_{x_j}(k)] = Var[\hat{r}_{v_j}(Mk)] \geq Var[\hat{r}_{v_j}(k)] \tag{2.30}$$

Néanmoins, cet inconvénient est à nuancer dans la pratique. Étant donné que l'on ne dispose que d'un nombre fini d'échantillons N pour $u(n)$, on ne peut estimer son autocorrélation $r_u(k)$ que jusqu'à un rang $N-1$ et donc $r_{x_j}(k)$ que jusqu'à un rang $N/M-1$. On utilisera donc les mêmes échantillons d'autocorrélation pour l'estimation spectrale large-bande et dans les sous-bandes.

2.4.3 Recouvrement spectral et continuité de l'estimateur de densité spectrale de puissance

Introduction

Dans la théorie classique de Fourier, on a coutume d'appeler *recouvrement spectral* le résultat de l'échantillonnage d'un signal avec une fréquence d'échantillonnage trop faible. Sans vouloir re-démontrer le célèbre résultat de Shannon, l'échantillonnage périodique idéal tel que représenté figure (2.7) entraîne une périodisation de la densité

spectrale de puissance de $x(t)$:

$$Y(f) = \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} X(f - k \frac{1}{T}) \quad (2.31)$$

dans laquelle T représente la période d'échantillonnage. Le recouvrement spectral correspond alors aux termes pour $k \neq 0$.

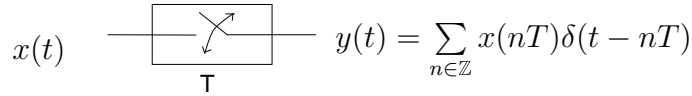


FIG. 2.7 – Échantillonnage périodique idéal d'un signal.

Lorsqu'on fait du découpage en sous-bandes, on décime par un facteur M les signaux filtrés, ce qui correspond à un re-échantillonnage du signal. On peut trouver dans [20] le calcul de la transformée de Fourier de la sous-série d'indice 0, $x_{j,0}(n)$. En suivant le même raisonnement, on peut aisément étendre ce résultat à n'importe quelle sous-série :

$$\forall j, m \in [0, \dots, M-1], X_{j,m}(e^{i2\pi f}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{-i2\pi \frac{f-k}{M} m} V_j(e^{i2\pi \frac{f-k}{M}}) \quad (2.32)$$

Les détails de ce calcul sont présentés en annexe A.

De même que dans le cas d'une l'estimation spectrale classique, on définit le *recouvrement spectral* comme étant l'ensemble des termes $k \neq 0$ dans (2.32). Il faut préciser que si, dans le cas d'une estimation spectrale classique, le recouvrement spectral apparaît principalement sur "les bords" (c'est-à-dire autour des fréquences normalisées -0.5 et 0.5), il apparaît ici au voisinage de la frontière de chacune des M sous-bandes.

L'idée est alors de reconstruire la densité spectrale de puissance du signal original, sous-bande par sous-bande, en choisissant pour chaque sous-bande j un estimateur $\hat{X}_{j,m}(e^{i2\pi f})$ pour $X_{j,m}$ et en posant :

$$\forall f \in SB_j, |\hat{U}(e^{i2\pi f})|^2 = \frac{M^2}{L} |\hat{X}_{j,m}(e^{i2\pi Mf})|^2 \quad (2.33)$$

dans le cas de filtres idéaux pour lesquels L représente l'amplitude du module carré de la transmittance de chacun des filtres dans la bande passante.

Ainsi, pour reconstruire la densité spectrale de puissance de $u(n)$ sur le segment $SB_j = [(j-1)\frac{0.5}{M}, j\frac{0.5}{M}]$, on doit estimer celle de $x_{j,m}(n)$ sur un segment $MSB_j = [(j-1)0.5, j0.5]$ de longueur 0.5 (qui dépend en fait de la parité de j) et étant donnée la périodicité 1 de $X_{j,m}(e^{i2\pi f})$, on doit en fait estimer $X_{j,m}(e^{i2\pi f})$ pour $f \in [0, 0.5]$ si j est impair ou pour $f \in [-0.5, 0]$ si j est pair.

Bien sûr, cette façon de reconstruire la densité spectrale de puissance du signal morceaux par morceaux va, en plus des problèmes de recouvrement spectral (dus au fait que les filtres d'analyse ne sont pas idéaux), présenter des problèmes de continuité entre une sous-bande et les sous-bandes contiguës.

Enfin, remarquons que si on fait l'hypothèse que les filtres $H_j(e^{i2\pi f})$ sont des passe-bande idéaux :

$$|H_j(e^{i2\pi f})|^2 = \begin{cases} L & \text{si } f \in SB_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.34)$$

il n'y a plus de recouvrement spectral puisque :

$$\forall f, X_{j,m}(e^{i2\pi Mf}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{-i2\pi(f-\frac{k}{M})m} H_j(e^{i2\pi(f-\frac{k}{M})}) U(e^{i2\pi(f-\frac{k}{M})}) \quad (2.35)$$

avec $H_j(e^{i2\pi(f-\frac{k}{M})}) = 0$ pour $k \neq 0$ quelque soit la fréquence $f \in SB_j$. Donc :

$$\begin{aligned} \forall f \in SB_j, X_{j,m}(e^{i2\pi Mf}) &= \frac{1}{M} H_j(e^{i2\pi f}) U(e^{i2\pi f}) \\ \Rightarrow \forall f \in SB_j, |X_{j,m}(e^{i2\pi Mf})|^2 &= \frac{L}{M^2} |U(e^{i2\pi f})|^2 \end{aligned} \quad (2.36)$$

or, comme on l'a vu dans la partie 2.4.2, les sous-séries $x_{j,m}(n)$ issues de la sous-bande ont toutes la même densité spectrale de puissance, indépendamment de m :

$$S_{x_j}(f) = \frac{|X_{j,m}(e^{i2\pi f})|^2}{N/M} \quad (2.37)$$

de même,

$$S_u(f) = \frac{|U(e^{i2\pi f})|^2}{N} \quad (2.38)$$

d'où :

$$\forall f \in SB_j, S_{x_j}(Mf) = \frac{L}{M} S_u(f) \quad (2.39)$$

Mise en évidence sur un exemple

Afin d'illustrer ces deux problèmes de recouvrement spectral et de continuité de l'estimateur de densité spectrale de puissance, considérons le cas d'un signal purement sinusoïdal plongé dans un bruit blanc gaussien additif indépendant des échantillons du signal :

$$u(n) = A_1 \sin(2\pi f_1 n + \phi_1) + b(n), \quad (2.40)$$

où $A_1 = 1$, $f_1 = 0.3$, ϕ_1 est uniformément distribuée sur $[0, 2\pi]$ et la variance du bruit blanc additif est $\sigma^2 = E[n^2(t)] = 0.5$ (le rapport signal à bruit est $\text{SNR} = 10 \log \left(\frac{A_1^2}{2\sigma^2} \right) = 0 \text{dB}$). Le signal $x(n)$ est filtré par un banc de filtres modulé en exponentielles complexes à $M = 8$ branches. On peut visualiser la réponse fréquentielle du 3^{ème} filtre sur la figure (2.8).

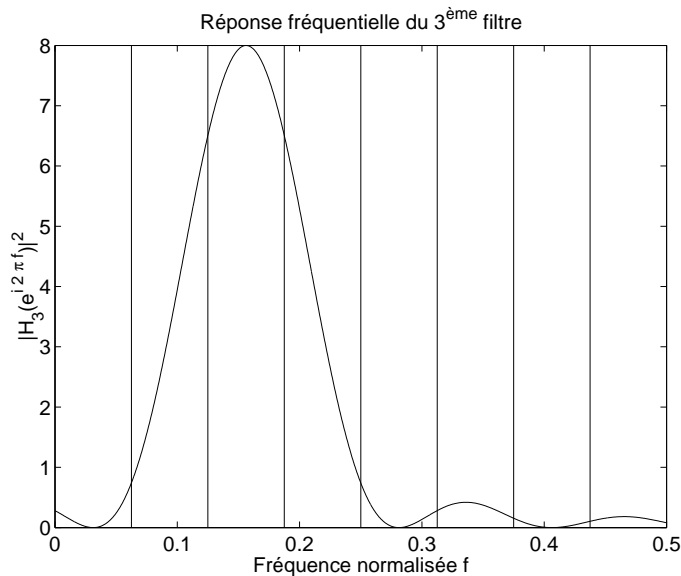


FIG. 2.8 – Réponse fréquentielle du 3^{ème} filtre d'analyse.

Bien sûr, on constate tout de suite que ce ne sont pas des filtres idéaux. Néanmoins, on va faire cette hypothèse et reconstruire la densité spectrale de puissance

du signal original $u(n)$ à l'aide de densité spectrale de puissance des signaux de sous-bandes en utilisant l'équation (2.39) dans chaque sous-bande comme si on avait affaire à des filtres idéaux. Ceci permettra de mettre en évidence les conséquences de cette hypothèse quant à la continuité de la densité spectrale de puissance estimée et au recouvrement spectral.

La figure (2.9) montre la densité spectrale de puissance “large bande” (c'est-à-dire estimée directement à partir du signal original $u(n)$), ainsi que les densités spectrales de puissance des signaux associés aux 5^{ème} et 6^{ème} sous-bandes (correspondant à $[0.25, 0.3125[$ et $[0.3125, 0.375[$). Ces estimations de densités spectrales de puissance sont moyennées à partir de 50 réalisations indépendantes (tirages de Monte-Carlo). Sur cette figure, on a volontairement déplacé la densité spectrale de puissance de sous-bande de 30 *dB* vers le haut pour une meilleure lisibilité.

L'estimateur choisi pour estimer la transformée de Fourier discrète $U(e^{i2\pi f})$ puis la DSP de $u(n)$ est un estimateur auto-régressif classique d'ordre $p = 128$ (voir [1], p.153). Pour une comparaison la plus honnête possible, on a choisi d'utiliser dans les sous-bandes la même modélisation *AR* mais en utilisant un ordre $p_{sub} = \frac{p}{M} = 16$. En effet, dans le cadre d'une situation réelle dans laquelle on ne dispose que d'un nombre fini d'échantillons, on peut imaginer qu'il soit impossible d'estimer la corrélation pour un ordre supérieur à p .

Comme on peut le voir, deux pics différents apparaissent dans les deux sous-bandes contiguës car la fréquence du signal sinusoïdal est proche de la frontière des sous-bandes. De plus, l'utilisation du zoom permet de mettre en évidence la discontinuité apparaissant sur l'estimateur “sous-bandes” au passage de cette frontière (voir figure (2.10)).

On peut remarquer que, dans ces conditions, il n'y a aucune différence quant à la résolution (largeur du pic à $-3dB$) entre ces deux méthodes, de même que dans l'analyse de Fourier. D'après l'équation (1.23), la résolution spectrale (largeur du pic à $-3dB$) est $W_{AR} = \frac{4}{\pi p^2 \gamma}$, où γ est le rapport signal à bruit défini par $\gamma = \frac{A_1^2}{2\sigma^2}$. Ainsi, le fait de passer de la méthode “large bande” à la méthode “sous-bande” fait perdre

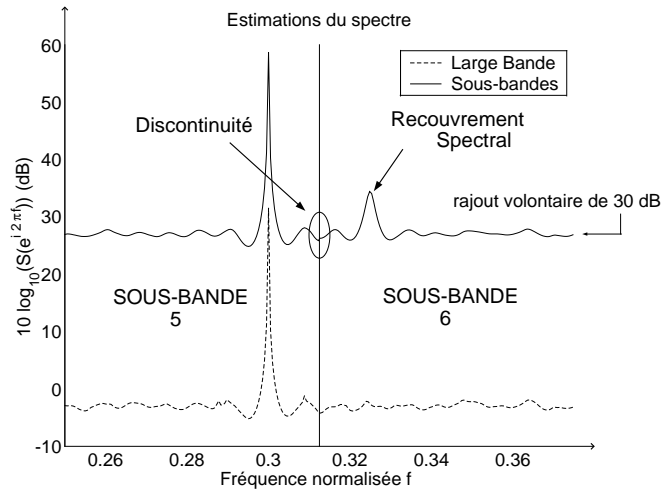


FIG. 2.9 – Densités spectrales de puissance moyennées associées aux 5^{ème} et 6^{ème} sous-bandes d'une sinusoïde bruitée.

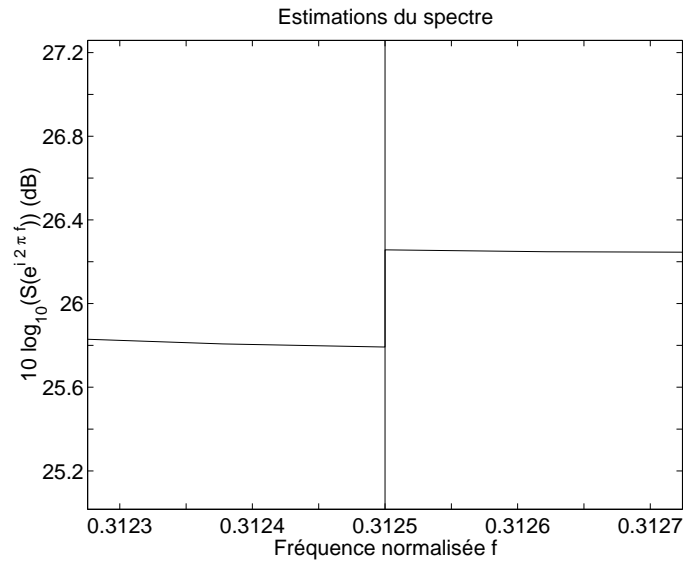


FIG. 2.10 – Zoom autour de la frontière des 5^{ème} et 6^{ème} sous-bandes.

un facteur M^2 sur la résolution (car $p_{sub} = \frac{p}{M}$) mais on regagne un facteur M du fait qu'on estime la densité spectrale de puissance de $x_{j,m}$ en Mf au lieu de f et un autre facteur M dû à la réduction d'un facteur M du SNR local γ (voir partie 2).

Chapitre 3

Les solutions proposées

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va s'intéresser aux différentes méthodes originales qui ont été développées afin de palier les différents problèmes qui se posent lorsqu'on fait du découpage en sous-bandes pour estimer le contenu fréquentiel d'un signal à analyser. Ces problèmes ont été détaillés dans le chapitre précédent. Le premier problème consiste en la reconstruction de la densité spectrale de puissance du signal original étant données les estimées des densités spectrales de puissance des signaux de sous-bande. Cette reconstruction fait apparaître des problèmes de continuité de l'estimateur et de recouvrement spectral au voisinage des frontières des sous-bandes. Un autre problème consiste en la perte d'informations a priori sur les échantillons connus de l'autocorrélation et son étude fera l'objet des 2 sections suivantes dans ce chapitre.

3.2 Recouvrement spectral et continuité de l'estimateur

3.2.1 Introduction

Mis à part les problèmes liés à la variance des estimateurs d'autocorrélation dans les sous-bandes, les deux principaux problèmes qui apparaissent lorsque l'on veut estimer le contenu spectral d'un signal $u(n)$ à partir des signaux issus de son découpage

en sous-bandes sont le recouvrement spectral et la continuité de la densité spectrale de puissance. Dans le reste de cette section on va voir comment éviter ces deux problèmes grâce à l'utilisation conjointe d'un dispositif de glissement fréquentiel placé en amont du banc de filtres et d'un banc de filtres approprié.

3.2.2 Élimination du recouvrement spectral et des discontinuités

Introduction

Le but de la solution que nous allons proposer est de permettre d'employer un banc de filtres non idéaux et d'éviter les inconvénients majeurs du découpage en sous-bandes, tout en conservant certains de ses avantages détaillés dans le chapitre précédent dans les paragraphes 2.2 et 2.3. Le fait que les problèmes de recouvrement et de continuité apparaissent au voisinage des frontières des sous-bandes nous conduit à envisager deux solutions théoriquement équivalentes pour estimer la densité spectrale de puissance dans ces régions : soit changer le banc de filtres, soit faire glisser le contenu fréquentiel du signal en introduisant, en amont du banc de filtres, un dispositif de glissement du contenu fréquentiel du signal (qui peut éventuellement être une simple modulation par une exponentielle complexe). Même si ces deux méthodes sont théoriquement équivalentes, il semble plus judicieux d'opter pour la seconde en raison de sa plus grande simplicité de mise en œuvre : on n'effectue qu'une opération au lieu d'en effectuer M .

La solution proposée est représentée sur la figure (3.1). Elle consiste à présenter un signal $u_{\Delta}(n)$ dont la densité spectrale de puissance a été modifiée afin d'être mieux adaptée au banc de filtres. Ramener les fréquences d'intérêt en milieu de sous-bande peut être un moyen efficace de diminuer le recouvrement spectral, en se plaçant ainsi à l'extérieur de la bande de recouvrement des filtres. Nous allons donc proposer deux méthodes de glissement du contenu fréquentiel d'un signal qui ramènent les fréquences d'intérêt en milieu de sous-bande : une méthode à base de filtres de Laguerre et une autre, plus simple mais qui impose une propriété particulière au banc de filtres.

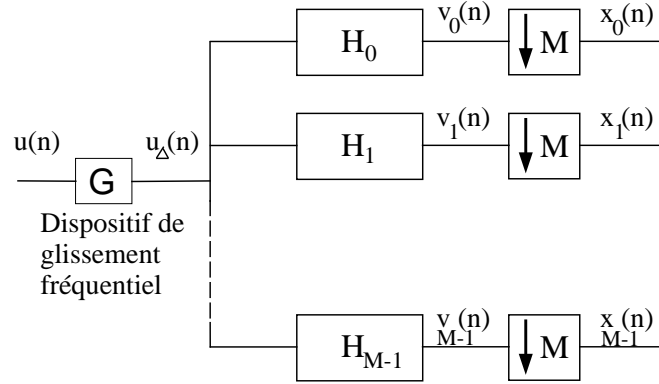


FIG. 3.1 – Banc de filtres avec dispositif de glissement fréquentiel.

Filtres de Laguerre

Une première méthode destinée à diminuer le recouvrement spectral est de projeter le signal sur une base de Laguerre (voir [36] et les références contenues). La méthode proposée dans le cadre de notre étude a fait l'objet d'une publication [37]. Elle consiste à filtrer le signal original (avant son passage dans le banc de filtres) par une cascade de D filtres passe-tout causaux, où D est la dimension de la base de Laguerre sur laquelle on va projeter les échantillons du signal. Ces filtres sont tous d'ordre 1, à réponse impulsionnelle infinie. Leur transformée en Z est donnée par l'équation (3.1).

$$W(z) = \frac{z^{-1} - b}{1 - bz^{-1}} \quad (3.1)$$

La structure correspondante et sa représentation symbolique sont représentés figures (3.2.a) et (3.2.b).

Si on calcule $W(z)$ sur le cercle unité, on peut montrer que $W(e^{i2\pi f}) = e^{-i\theta_b(f)}$, où

$$\theta_b(f) = 2\pi f + 2 \arctan \left(\frac{b \sin 2\pi f}{1 - b \cos 2\pi f} \right), \quad (3.2)$$

ce qui montre la structure passe-tout du filtre $W(z)$. Cette méthode est très semblable à celle proposée par [36] représentée figure (3.3).

La différence est que la convolution avec le filtre de Laguerre d'ordre 0, $\Lambda_0(z)$ a été

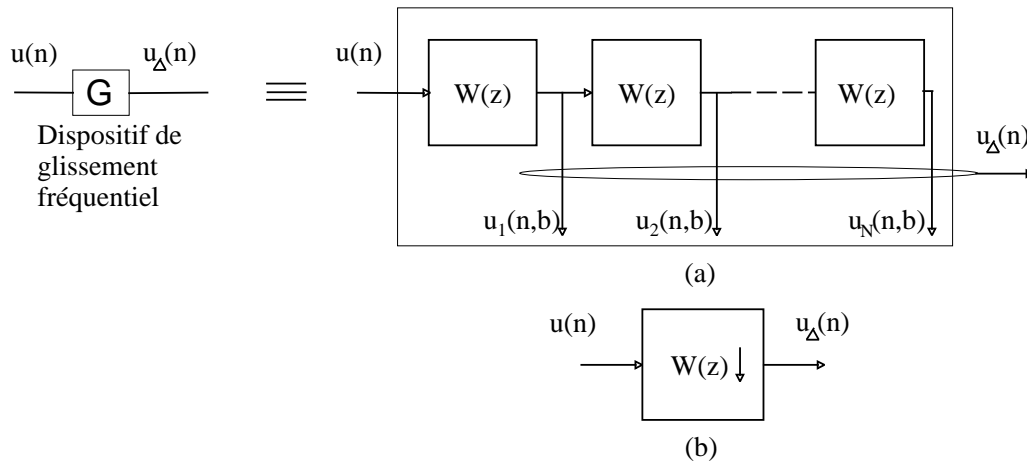


FIG. 3.2 – Cascade de N filtres pour le glissement fréquentiel (a) et sa représentation symbolique (b).

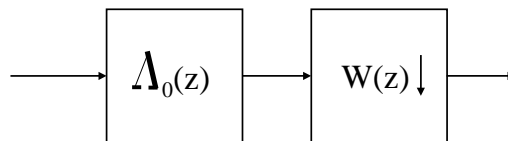


FIG. 3.3 – Cascade de filtres de Laguerre.

retirée de la structure d'Evangelista, ce qui permet d'obtenir un glissement fréquentiel sans aucune distorsion d'amplitude. La propriété de reconstruction parfaite n'est plus satisfaite en l'absence de $\Lambda_0(z)$ mais une telle propriété n'est pas requise dans le cadre de l'estimation spectrale.

Notons $U_m(z; b)$ la transformée en Z de la sortie du $m^{\text{ème}}$ filtre passe-tout. Le résultat suivant peut être facilement obtenu :

$$\begin{aligned} U_m(e^{i2\pi f}; b) &= U(e^{i2\pi f})W^m(e^{i2\pi f}) \\ &= U(e^{i2\pi f})e^{-im\theta_b(f)}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

où $U(z)$ est la transformée en Z de la séquence d'entrée $u(n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Dans la pratique, la projection sur une base de Laguerre de dimension D consiste à réaliser l'opération suivante :

- On filtre le signal $u(n)$ par la cascade de D filtres passe-tout pour obtenir les D sorties de ces filtres notées $u_m(n)$ pour $m = \{1, \dots, D\}$.
- Si on décide de ranger ces sorties en colonnes et qu'on les dispose côte-à-côte, on obtient la matrice d'échantillons suivante :

$$\begin{bmatrix} u_1(0) & u_2(0) & \dots & u_D(0) \\ u_1(1) & u_2(1) & & u_D(1) \\ \dots & & & \\ u_1(N-1) & u_2(N-1) & & u_D(N-1) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

- Le signal $u_\Delta(n)$ est alors formé en prenant l'une quelconque des lignes de cette matrice et comportera donc D échantillons. Ce point est détaillé dans le paragraphe suivant.

Afin de comprendre ce qu'il advient d'une composante fréquentielle fixée f_1 , considérons le cas d'un signal sinusoïdal pur $u(n) = A_1 \cos(2\pi f_1 n + \phi_1)$. La sortie du $m^{\text{ème}}$ filtre passe-tout est :

$$u_m(n; b) = A_1 \cos(2\pi f_1 n + \phi_1 - m\theta_b(f_1)) \quad (3.5)$$

L'idée, lorsqu'on construit $u_\Delta(n)$ à partir d'une ligne de la matrice ci-dessus est alors de se fixer l'indice n et de considérer que $u_m(n; b)$ est fonction de m , que l'on

considérera comme le nouvel indice temporel. Cette expression de $u_m(n; b)$ est clairement périodique par rapport à m , de période $\frac{2\pi}{\theta_b(f_1)}$. En conséquence, $u_m(n; b)$ admet la décomposition en série de Fourier suivante :

$$u_m(n; b) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{im\theta_b(f_1)k}, \quad (3.6)$$

où les coefficients de la décomposition en série de Fourier sont clairement définis par :

$$c_k = \begin{cases} \frac{A_1}{2} e^{-i(2\pi f_1 n + \phi_1)} & k = 1 \\ \frac{A_1}{2} e^{i(2\pi f_1 n + \phi_1)} & k = -1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

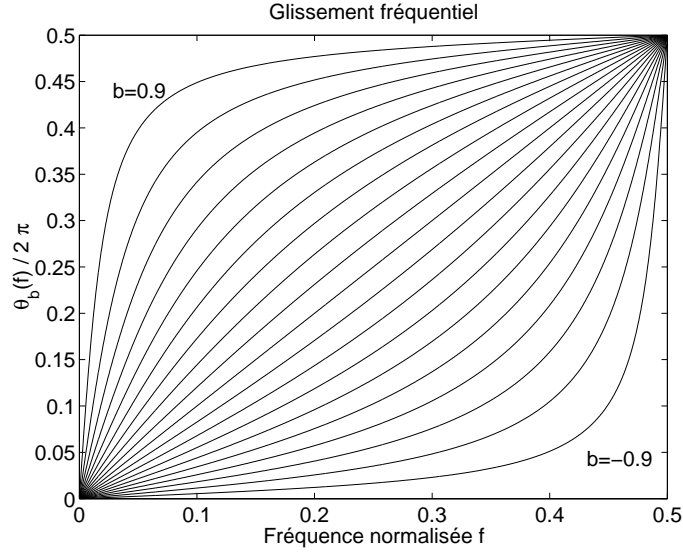
En d'autres termes, la représentation de $u_m(n; b)$ dans le domaine fréquentiel lié à l'indice temporel m consiste en la somme de 2 exponentielles complexes de fréquences $\pm \frac{\theta_b(f_1)}{2\pi}$. Cette analyse montre que le banc de filtres représenté figure (3.2.a) peut être utilisé comme un moyen de faire glisser chaque fréquence f_1 de la densité spectrale de puissance de $u(n)$ en $\frac{\theta_b(f_1)}{2\pi}$.

Le glissement fréquentiel correspondant dépend du paramètre de réglage b ainsi que représenté figure (3.4), sur laquelle on voit que le glissement dépend non linéairement de la fréquence.

Dans la pratique, on pourra choisir $D = N$ pour conserver le même nombre d'échantillons que $u(n)$ et on choisira de former $u_\Delta(n)$ à partir de la dernière ligne de la matrice 3.4 (correspondant aux derniers échantillons) afin de se situer hors du régime transitoire de la cascade de filtres de Laguerre (chaque filtre entraîne un retard supplémentaire de 1 échantillon). D'autre part, la valeur du paramètre b adaptée pour ramener chaque fréquence d'intérêt ν au milieu de sa sous-bande correspondante dépend de ν . Si on veut estimer le spectre $\forall \nu \in [0, 1]$, le principe de la méthode proposée est résumé ci-dessous.

Pour ν fixé $\in [0, 1]$:

- 1 - Sélection de la sous-bande j connaissant ν : $j = Ent[2M\nu]$. (où $Ent[.]$ désigne la partie entière).


 FIG. 3.4 – Glissement fréquentiel en fonction de b .

2 - Sélection du paramètre b : on utilise l'équation (3.2) pour trouver b tel que $\theta_b(\nu) = F_j$ où F_j est le milieu de SB_j .

3 - Projection sur la base de Laguerre de dimension $D = N$. On forme le signal $u_\Delta(n)$ ainsi qu'indiqué précédemment.

4 - Découpage en sous-bandes et estimation spectrale : on applique le $j^{\text{ème}}$ filtre du banc de filtres choisi à $u_\Delta(n)$ afin d'obtenir le signal de sous-bande auquel on applique une méthode d'estimation spectrale quelconque pour estimer la densité spectrale de puissance en un unique point en fréquence : MF_j . On obtient alors $\left| \widehat{X}_j(e^{i2\pi MF_j}) \right|^2$.

5 - Reconstruction de la densité spectrale de puissance de $u(n)$: on utilise les relations de filtrage linéaire (qui seront explicitées plus loin dans le manuscrit, équation (3.13) par exemple) pour déduire de $\left| \widehat{X}_j(e^{i2\pi MF_j}) \right|^2$ la valeur de $\left| \widehat{U}_\Delta(e^{i2\pi F_j}) \right|^2 = \left| \widehat{U}(e^{i2\pi \nu}) \right|^2$, puis $S_u(\nu)$.

Afin d'illustrer l'intérêt de cette technique, nous l'appliquons au signal présenté dans le chapitre précédent, paragraphe 2.4.3, page 48. On a réalisé le glissement fréquentiel pour deux valeurs de b . La figure (3.5) représente les densités spectrales

de puissance des signaux associés aux 5^{ème} et 6^{ème} sous-bandes pour $b = 0$ (pas de glissement fréquentiel) et $b = -0.0608$. Cette dernière valeur de b a été calculée grâce à l'équation (3.2) afin de ramener la fréquence de la sinusoïde $f_1 = 0.31$ au milieu de la 5^{ème} sous-bande, soit en 0.28125. En effet, étant-donnée la transmittance de type passe-bande des filtres de découpage en sous-bandes, c'est le plus souvent là qu'il y a le moins de recouvrement spectral. Comme on peut le constater, une valeur de b appropriée pour une fréquence fixée permet de faire pratiquement disparaître les problèmes de recouvrement spectral. Notons que sur cette figure, l'étape 5 de recalage du spectre à sa vraie fréquence n'a pas été effectuée.

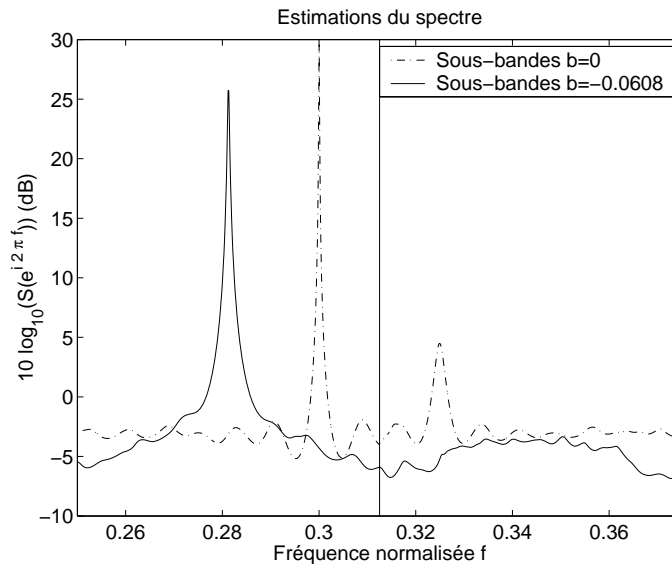


FIG. 3.5 – Densités spectrales de puissance des signaux de sous-bandes pour 2 valeurs de b .

Cette technique de glissement du contenu fréquentiel permet ainsi de décaler chaque fréquence d'intérêt vers le milieu de la sous-bande qui la contient, avant d'effectuer le filtrage par le banc de filtres. L'intérêt et la motivation essentielle de cette technique est de se ramener en milieu de bande-passante des filtres, minimisant ainsi les problèmes de recouvrement dus aux filtres adjacents.

Toutefois, cela ne permet pas d'éliminer de manière certaine ce problème de recouvrement qui est lié à la nature des filtres choisis. C'est pourquoi nous nous sommes ensuite intéressés à la recherche d'un banc de filtres qui pourrait satisfaire notre souci

d'élimination du problème de recouvrement, en le couplant à une technique de glissement. Ceci fait l'objet du paragraphe suivant.

Utilisation des filtres-peigne

La deuxième méthode destinée à éliminer le recouvrement spectral et les discontinuités au voisinage de la frontière des sous-bandes est basée sur l'utilisation conjointe d'une simple modulation par une exponentielle complexe en tant que dispositif de glissement fréquentiel et d'un banc de filtres approprié. Cette méthode a également fait l'objet de deux publications (voir [38] et [39]). Dans ce cas, le dispositif de glissement fréquentiel est représenté figure (3.6).

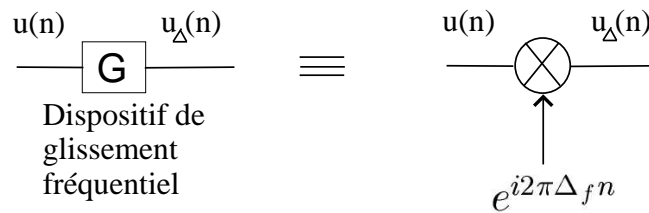


FIG. 3.6 – Dispositif de glissement par exponentielle complexe.

De sorte que :

$$u_{\Delta}(n) = u(n)e^{i2\pi\Delta_f n} \quad (3.7)$$

Ce dispositif de glissement fréquentiel est bien sûr beaucoup plus simple que celui proposé dans le paragraphe précédent. On associe ensuite à ce dispositif un banc de *filtres-peigne* (ou “comb filters” en anglais). De tels filtres sont couramment utilisés dans le domaine du découpage en sous-bandes (voir [21], p.227 ou [33] qui donne une façon économique pour implanter ce type de filtres) en tant que filtres de décimation ou d'interpolation. Leur propriété fondamentale est d'avoir leur réponse fréquentielle qui s'annule périodiquement sur l'abscisse fréquentielle. Plus précisément, on propose d'utiliser un banc de filtres à réponse impulsionnelle finie, tous issus d'un même filtre $h(n)$ d'ordre L par modulation en exponentielles complexes :

$$h(n) = \begin{cases} 1/\sqrt{L} & \text{si } 0 \leq n \leq L - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.8)$$

Le filtre d'analyse de la $j^{\text{ème}}$ sous-bande est alors défini par :

$$\forall j \in [0, \dots, M-1], h_j(n) = h(n) \cdot e^{i2\pi F_j n} \quad (3.9)$$

où $F_j = \frac{0.25}{M} + j \frac{0.5}{M}$ est le milieu de la sous-bande SB_j . soit :

$$H_j(e^{i2\pi f}) = H(e^{i2\pi(f-F_j)}) \quad (3.10)$$

On montre aisément que

$$H(e^{i2\pi f}) = e^{i2\pi f(L-1)} \frac{\sin \pi f L}{\sqrt{L} \sin \pi f} \quad (3.11)$$

Il suffit donc de choisir L multiple de M pour que $H(e^{i2\pi f})$ s'annule pour f multiple non nul de $\frac{1}{M}$, de sorte que :

$$\text{Si } L \text{ multiple de } M, \quad \left| H_j(e^{i2\pi(F_j - \frac{k}{M})}) \right|^2 = \begin{cases} L & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.12)$$

On a alors éliminé le recouvrement spectral, non pas pour toute valeur de fréquence f mais en un unique point en fréquence $f = F_j$:

$$\begin{aligned} |X_{j,m}(e^{i2\pi M F_j})|^2 &= \left| \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{-i2\pi(F_j - \frac{k}{M})m} H_j(e^{i2\pi(F_j - \frac{k}{M})}) U_{\Delta}(e^{i2\pi(F_j - \frac{k}{M})}) \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{M} e^{-i2\pi F_j m} H_j(e^{i2\pi F_j}) U_{\Delta}(e^{i2\pi F_j}) \right|^2 \\ &= \frac{L}{M^2} |U_{\Delta}(e^{i2\pi F_j})|^2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

On peut voir sur la figure (3.7) une représentation fréquentielle de cette démarche. On a choisi un banc uniforme de $M = 4$ filtres, tous d'ordre $L = M$. La figure (3.7.a) montre la densité spectrale de puissance du signal original $u(n)$ ainsi que la réponse fréquentielle du filtre-peigne associé à la 3^{ème} sous-bande ($j = 2$). La figure (3.7.b) montre les différentes versions décalées de la réponse fréquentielle du filtre H_2 et de la DSP du signal filtré par H_2 pour $k = 0, 1, 2, 3$: $H_2(e^{-i2\pi(f - \frac{k}{M})})$ et $H_2(e^{-i2\pi(f - \frac{k}{M})}) U(e^{-i2\pi(f - \frac{k}{M})})$. Enfin, la figure (3.7.c) montre la densité spectrale de puissance des $x_{j,m}(n)$ exprimée en Mf et sur la figure (3.7.d) est représentée la densité spectrale d'énergie $|X_{j,m}(e^{i2\pi f})|^2$. On constate bien sur cette figure qu'il n'y a pas de recouvrement spectral en $f = F_2$ puisque $\forall j \in [0, \dots, M-1], |X_{j,m}(e^{i2\pi M F_j})|^2 = \frac{L}{M^2} |U_{\Delta}(e^{i2\pi F_j})|^2$.

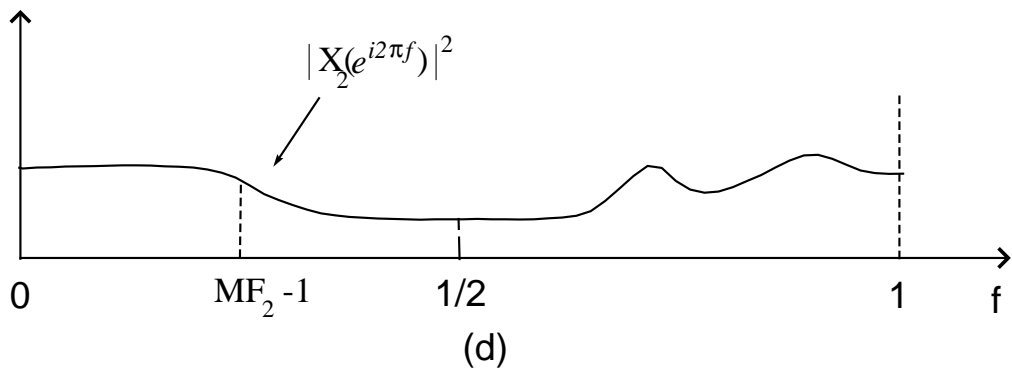
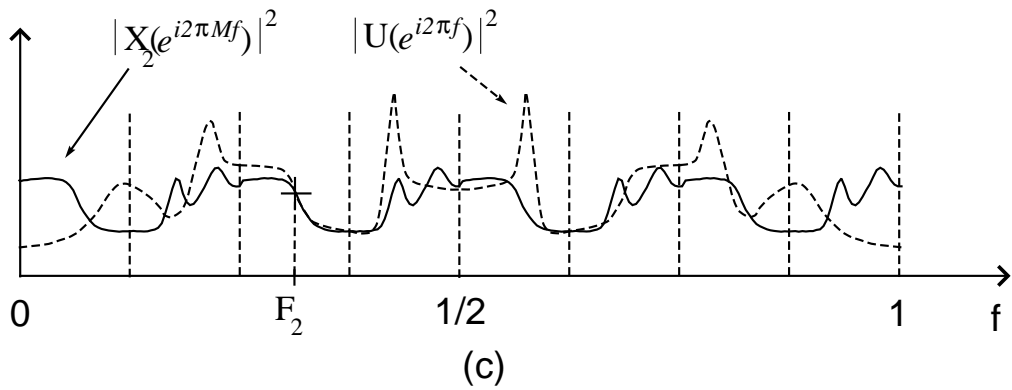
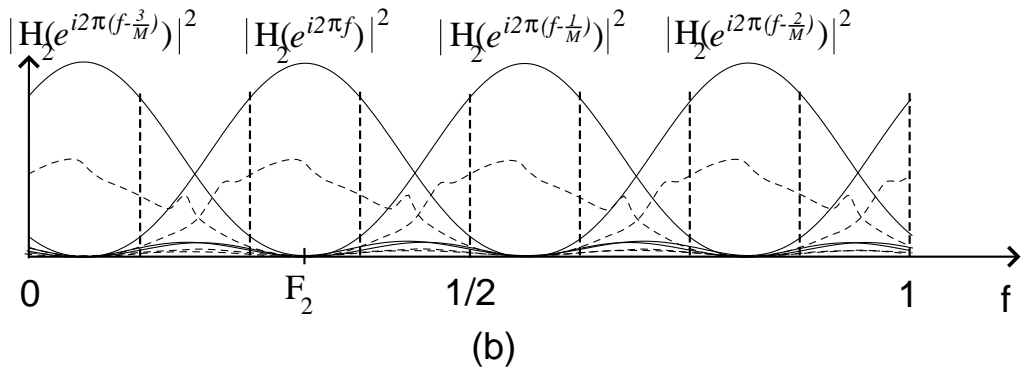
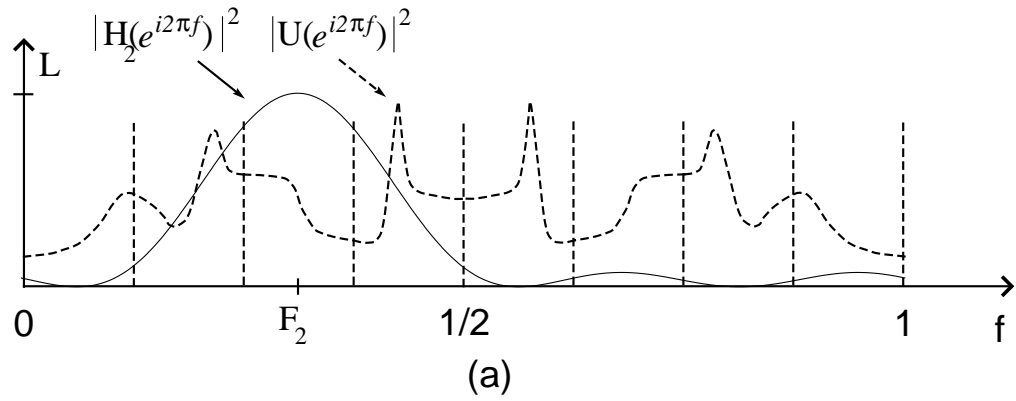


FIG. 3.7 – Élimination du recouvrement spectral au centre des sous-bandes.

Pour éliminer le recouvrement fréquentiel $\forall f \in [0, 1]$ on choisit pour le dispositif de glissement fréquentiel :

$$\Delta_f = F_j - \nu \quad (3.14)$$

où ν est la fréquence à laquelle on veut estimer l'amplitude de la densité spectrale de puissance. On a alors :

$$|U(e^{i2\pi\nu})|^2 = |U_\Delta(e^{i2\pi F_j})|^2 = \frac{L}{M^2} |U_\Delta(e^{i2\pi F_j})|^2 \quad (3.15)$$

Cela permet de ramener l'estimation de la densité spectrale de puissance de $u(n)$ d'une fréquence ν quelconque en F_j , milieu de la sous-bande correspondant à la fréquence ν . Comme on vient de montrer que le banc de filtres était sans recouvrement spectral en F_j , ceci permet donc une estimation de la densité spectrale de puissance de $u(n)$ sans aucune distorsion d'amplitude.

Plus précisément, soit $\nu \in [0, 1]$ la fréquence à laquelle on veut estimer la densité spectrale de puissance $S_u(\nu)$. Le principe de la méthode proposée est résumé ci-dessous.

Pour ν fixé $\in [0, 1]$:

- 1 - Sélection de la sous-bande j connaissant ν : $j = Ent[2M\nu]$. (où $Ent[.]$ désigne la partie entière).
- 2 - Modulation complexe : glissement uniforme de la densité spectrale de puissance du signal d'entrée $u(n)$ d'une quantité $\Delta_f = F_j - \nu$: $u_\Delta(n) = e^{i2\pi n} u(n)$.
- 3 - Découpage en sous-bandes : On applique le $j^{\text{ème}}$ filtre du banc de filtres-peigne à $u_\Delta(n)$ afin d'obtenir les M sous-signaux $x_{j,m}(n)$, $m \in [0, \dots, M - 1]$ issus de cette sous-bande.
- 4 - Estimation spectrale : On applique une méthode d'estimation spectrale quelconque sur les signaux de sous-bande pour estimer leur densité spectrale de puissance commune en un unique point en fréquence : MF_j . On obtient alors $\left| \widehat{X}_{j,m}(e^{i2\pi MF_j}) \right|^2$
- 5 - Reconstruction de la densité spectrale de puissance de $u(n)$: On utilise l'équation (3.13) pour en déduire $\left| \widehat{U}_\Delta(e^{i2\pi F_j}) \right|^2 = \left| \widehat{U}(e^{i2\pi\nu}) \right|^2$, puis $S_u(\nu)$.

Il est important de noter que ces techniques de glissement fréquentiel présentées dans ce chapitre peuvent être employées de façon parallèle, permettant d'estimer différentes composantes fréquentielles en même temps. En effet, l'opération de glissement fréquentiel (3.7) permet de ramener en une seule fois M composantes fréquentielles en milieu de leurs sous-bandes respectives $SB_0, SB_1, \dots, SB_{M-1}$. Les estimations spectrales peuvent ainsi être menées sur chacune des branches du banc de filtre.

Dans la pratique, on doit estimer l'autocorrélation commune des signaux $x_{j,m}(n)$, ce qui peut se faire de plusieurs façons différentes (voir partie chapitre 4, paragraphe 4.2).

On peut alors reconstruire toute la densité spectrale de puissance du signal original en faisant varier ν par pas successifs entre 0 et 1. Bien sûr, cette méthode peut difficilement être envisagée pour des applications temps-réel puisqu'on doit, pour chaque fréquence $\nu \in [0, 1]$, appliquer toute une procédure d'estimation spectrale afin d'estimer la densité spectrale de puissance en un unique point en fréquence. Néanmoins, ceci permet d'éliminer tout problème de recouvrement spectral d'une part, mais aussi les problèmes liés à la continuité de la densité spectrale de puissance estimée. En effet, tout se passe comme si on avait un même filtre-peigne d'analyse qui glissait *continûment* le long de l'axe des fréquences. On a ainsi pu éliminer deux problèmes majeurs de l'estimation spectrale par les sous-bandes, tout en conservant ses bonnes propriétés qui en procurent les motivations (voir partie 2). D'autre part, on peut noter que cette technique permet d'envisager l'emploi de techniques d'optimisation pour la recherche de la meilleure base au sens d'un certain critère (techniques "best basis"), mais sous une contrainte : les filtres adaptatifs recherchés doivent vérifier la condition d'élimination du recouvrement spectral au centre des sous-bandes donnée par l'équation (3.12). De nombreux travaux comme [40] ou [41] ont été menés très récemment sur le sujet du "best basis" et il est donc important de noter que ces techniques peuvent s'appliquer conjointement avec la méthode proposée ici.

La figure (3.8) montre le spectre reconstruit à partir des 5^{ème} et 6^{ème} sous-bandes avec et sans dispositif de glissement fréquentiel par exponentielles complexes et filtres-peigne. Ces estimateurs ont été obtenus à partir d'une moyenne sur 50 réalisations. On peut constater que les problèmes de recouvrement spectral et de continuité de l'estimateur de densité spectrale de puissance ont disparu. A noter que l'estimateur obtenu sans glissement fréquentiel a été déplacé de 30 *dB* vers le haut pour une meilleure lisibilité de la figure.

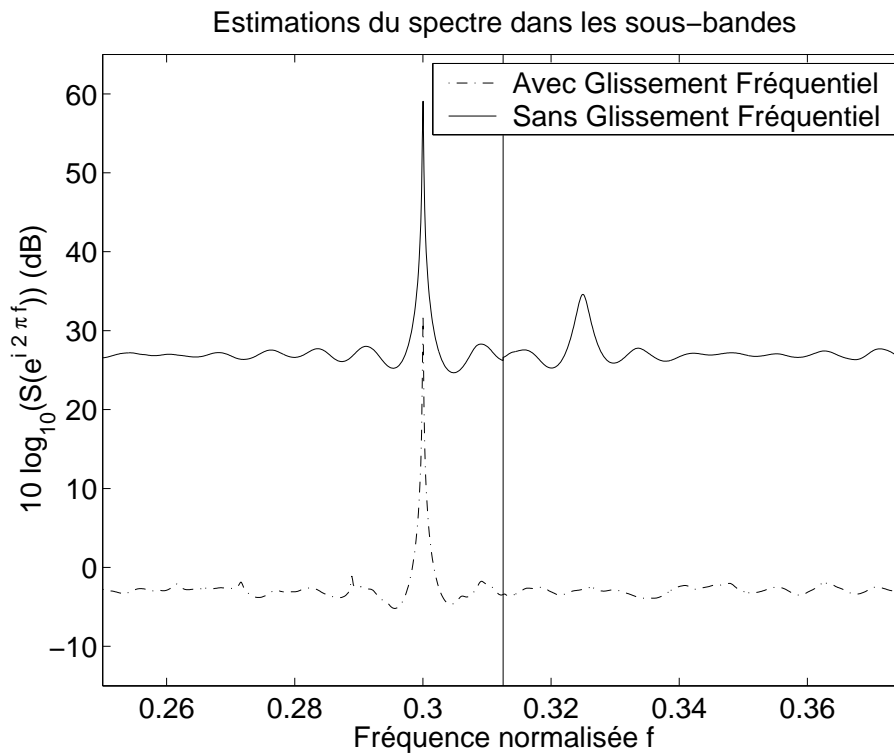


FIG. 3.8 – Élimination du recouvrement spectral $\forall f \in [0, 1]$.

3.3 Modèle auto-régressif avec décalage temporel

3.3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, lors du passage en revue des inconvénients du découpage en sous-bandes au paragraphe 2.4, page 43, nous avons remarqué que le décimateur placé à la suite de chaque filtre permet d'obtenir différentes sous-séries, suivant la façon dont est faite la décimation. Ces sous-séries peuvent être considérées comme autant de réalisations du même processus aléatoire ré-échantillonné. C'est pourquoi nous nous sommes intéressés à la façon de prendre en compte ces différentes réalisations du processus aléatoire afin d'améliorer la qualité de l'analyse spectrale qui va être faite à la sortie du décimateur. L'objectif de ce paragraphe est donc de proposer une technique d'analyse spectrale paramétrique (auto-régressive) utilisant l'information apportée par les différentes sous-séries d'échantillons qui apparaissent suite à la décimation du signal. A noter qu'on peut utiliser cette technique conjointement avec les techniques de glissement fréquentiel présentées dans le chapitre précédent et c'est pourquoi le signal qu'on présente au banc de filtre est $u_{\Delta}(n)$ au lieu de $u(n)$. Considérons la $j^{\text{ème}}$ branche d'un banc de filtres quelconque (uniforme ou non) représentée figure (3.9).

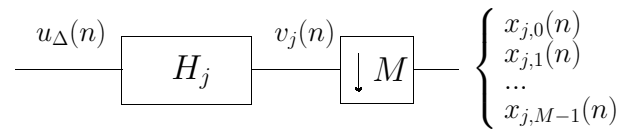


FIG. 3.9 – $j^{\text{ème}}$ branche du banc de filtres.

Si on connaît N échantillons d'un signal $u(n)$ filtré par le banc de filtres, on aura ainsi le même nombre N d'échantillons pour le signal filtré par le filtre de la $j^{\text{ème}}$ sous-bande, $v_j(n)$. En revanche, on se retrouve, après décimation par un facteur M , avec M sous-séries de longueur $N_{sub} = \frac{N}{M}$. Pour simplifier les raisonnements, on supposera, sans réellement perdre de généralité, que N est multiple de M . Comme on l'a vu dans le chapitre 2, paragraphe 2.4.2, toutes les sous-séries $x_{j,0}(n)$, $x_{j,1}(n)$, ..., $x_{j,M-1}(n)$ définies par l'équation (2.28) ont toutes la même autocorrélation et donc la même

densité spectrale de puissance. Ainsi, lorsqu'on fait de l'analyse spectrale dans les sous-bandes, on n'utilise a priori que les points d'autocorrélation correspondant à $r_{x_j}(k) = r_{v_j}(Mk)$. Ceci nous a conduit à imaginer des moyens pour exploiter l'information supplémentaire apportée par les points intermédiaires de l'autocorrélation $r_{v_j}(Mk - m)$ avec $1 \leq m \leq M - 1$. On peut d'ailleurs remarquer que ces points correspondent en fait à une intercorrélation entre deux sous-signaux issus de la $j^{\text{ème}}$ sous-bande :

$$\begin{aligned} r_{x_{j,m_1}x_{j,m_2}}(k) &\stackrel{def}{=} E [x_{j,m_1}(n)x_{j,m_2}^*(n-k)] \\ &= E [v_j(Mn - m_1)v_j^*(M(n-k) - m_2)] \\ &= r_{v_j}(Mk + m_2 - m_1) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Dans le reste de cette section, on va étudier un nouvel estimateur spectral, inspiré de l'estimateur spectral Auto-Régressif (*AR*), et qui permet de tirer parti des intercorrélations entre les différentes sous-séries du signal issu de la $j^{\text{ème}}$ sous-bande. Dans la suite de ce paragraphe, afin de ne pas alourdir les notations, nous allons volontairement omettre l'indice j relatif au numéro de la branche du banc de filtres. Les notations correspondant à la figure (3.9) deviennent donc telles que celles indiquées sur la figure (3.10).

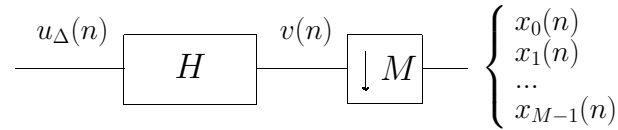


FIG. 3.10 – Une branche du banc de filtres.

Nous reprendrons les notations de la figure (3.9) lorsque nous nous intéresserons à nouveau à tout le banc de filtres.

3.3.2 Le modèle proposé

Le principe de la modélisation *AR* classique appliquée sur le signal filtré et décimé est d'exprimer la valeur de $x_m(n) = v(Mn - m)$ comme une combinaison linéaire des p échantillons précédents $x_m(n - k) = v(M(n - k) - m)$, $k = 1, \dots, p$. Toutefois, une telle modélisation conduit à estimer les paramètres du modèle à partir de la connaissance de la fonction d'autocorrélation du signal filtré et décimé $r_x(k)$, $k = 0, \dots, N_{sub}$. Or,

ces valeurs de la fonction d'autocorrélation ne correspondent qu'à un sous-ensemble des valeurs de la fonction d'autocorrélation du signal filtré $v(n)$:

$$r_x(k) = r_v(Mk), k = 0, \dots, N_{sub} \quad (3.17)$$

Il semble évident qu'il y a dans ce cas une perte d'information. Afin d'utiliser toutes les valeurs de $r_v(k)$ et pas seulement celles d'indice multiple de M , l'idée est de prendre en compte la remarque faite au sous-paragraphe précédent dans l'équation (3.16) : la fonction d'autocorrélation du signal filtré est égale à la fonction d'intercorrélation entre les sous-séries après filtrage et décimation. Si on veut faire apparaître les intercorrélations entre les sous-séries, l'idée est d'introduire un décalage temporel et d'exprimer $x_m(n)$ en fonction des $x_{m+l}(n)$ avec $l \geq 1$, comme indiqué figure (3.11).

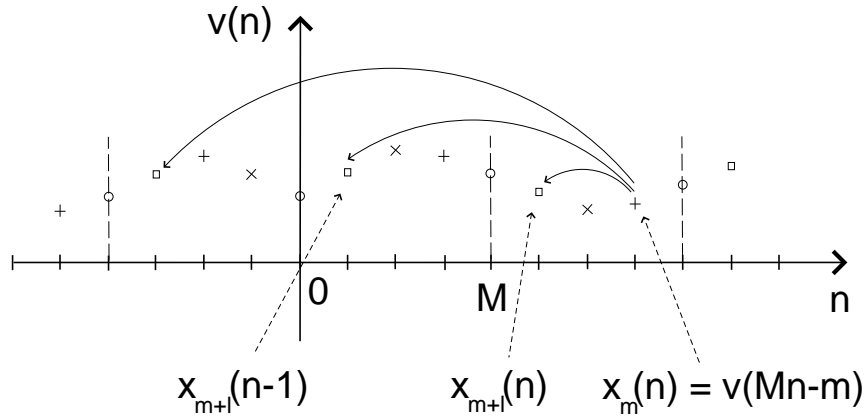


FIG. 3.11 – Décalage temporel pour l'utilisation des intercorrélations.

Il est important pour la suite de signaler que la notation $x_{m+l}(n)$ avec $l \geq 1$ n'est pas tout à fait en adéquation avec les définitions des sous-séries données dans la figure (3.10). En effet, si $m+l \leq M-1$, les définitions sont identiques. Mais on peut tout à fait choisir l tel que $m+l > M-1$. En fait, on a voulu désigner par $x_{m+l}(n)$ le premier échantillon intervenant dans la combinaison linéaire du prédicteur linéaire proposé. Cet échantillon peut se trouver suffisamment loin de $x_m(n)$ pour ne pas correspondre

à une des sous-séries située autour de $x_m(n)$. En toute rigueur,

$$\begin{aligned} x_{m+l}(n) &= x_r(n - q) \quad \text{avec } m + l = Mq + r \\ q &\in \mathbb{N} \\ r &\in \{0, \dots, M - 1\} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Cela permet de définir plusieurs modèles différents suivant la valeur de l . Dans ce qui suit, ces modèles prédictifs linéaires seront appelés modèles *AR avec décalage temporel* (*ARDT*). Ainsi, le modèle *ARDT* pour $l \geq 1$ définit un estimateur de $x_m(n)$ noté $\hat{x}_{l,m}(n)$:

$$\hat{x}_{l,m}(n) = - \sum_{k=1}^{p_{sub}} a_{k,l} x_{m+l}(n - k + 1), \forall l \geq 1 \text{ et } m \in \{0, \dots, M - 1\} \quad (3.19)$$

où p_{sub} est l'ordre de modélisation choisi dans les sous-bandes. Le principe de causalité est bien sûr respecté puisque le premier échantillon considéré dans l'estimateur de $x_m(n)$ est $x_{m+l}(n)$ qui arrive bien à une date antérieure du moment que $l \geq 1$.

On obtient ainsi autant de modèles que l'on veut en faisant varier l . Pour $l = M$, on retrouve le cas de la modélisation *AR* classique dans les sous-bandes. Dans la pratique, il faudra choisir l et p_{sub} suffisamment petits pour éviter d'utiliser les points de l'estimateur d'autocorrélation $\hat{r}_v(k)$ ayant une trop forte variance.

L'erreur de prédiction linéaire de ce modèle $e_{l,m}(n)$ est définie par la différence entre l'observation et l'estimé :

$$e_{l,m}(n) = x_m(n) - \hat{x}_{l,m}(n) = x_m(n) + \sum_{k=1}^{p_{sub}} a_{k,l} x_{m+l}(n - k + 1) \quad (3.20)$$

3.3.3 Estimation des coefficients de prédiction

Considérons l'espace vectoriel \mathcal{F} des variables aléatoires de moment d'ordre 2 fini, muni du produit scalaire hermitien $\langle \theta_1, \theta_2 \rangle = E[\theta_1 \theta_2^*]$. Il s'agit d'un espace de Hilbert et la norme associée au produit scalaire $\|\theta\| = \sqrt{\langle \theta, \theta \rangle}$ en fait un espace métrique complet. A noter que la norme au carré $\|\theta\|^2 = E[|\theta|^2]$ n'est rien d'autre que la puissance de la variable aléatoire θ .

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on a $x_m(n) \in \mathcal{F}$ et l'espace $\mathcal{V} = Vect(x_{m+l}(n), \dots, x_{m+l}(n - (p_{sub} - 1)))$

avec

$$\widehat{R} = \begin{pmatrix} \widehat{r}_v(0) & \widehat{r}_v(-M) & \dots & \widehat{r}_v(-M(p_{sub} - 1)) \\ \widehat{r}_v(M) & \widehat{r}_v(0) & & \\ \cdot & & \cdot & \\ \cdot & & \cdot & \\ \cdot & & \cdot & \\ \widehat{r}_v(M(p_{sub} - 1)) & & & \widehat{r}_v(0) \end{pmatrix}$$

et $\widehat{r}_l = [\widehat{r}_v(l) \ \widehat{r}_v(M+l) \ \dots \ \widehat{r}_v(M(p_{sub} - 1) + l)]^T$, où T désigne l'opérateur de transposition.

Ainsi on constate que \widehat{R} et \widehat{r}_l sont indépendants de m ce qui implique que les coefficients $a_{k,l}$ et leurs estimés $\widehat{a}_{k,l}$ sont également indépendants de m . D'autre-part, la matrice \widehat{R} est aussi indépendante de l et sa structure de Toeplitz remarquable permet l'emploi de l'algorithme de Levinson-Durbin pour la résolution du système (voir [1], p.213).

Ainsi, nous avons défini différents modèles AR avec décalage temporel caractérisés chacun par un décalage $l \geq 1$. Nous avons montré que l'estimation des coefficients de prédiction peut se faire à l'aide d'algorithmes d'estimation AR classiques. De plus, les modèles ainsi définis ne dépendent pas de l'indice m de la sous-série traitée mais dépendent uniquement du décalage l considéré. Afin de pouvoir construire un outil d'analyse spectrale à partir de ce modèle AR à décalage temporel, il est nécessaire d'étudier au préalable les propriétés statistiques de l'erreur de prédiction ainsi définie.

3.3.4 Propriétés de l'erreur de prédiction

La moyenne statistique de l'erreur de prédiction linéaire s'écrit à partir de (3.20) :

$$E[e_{l,m}(n)] = E[x_m(n)] + \sum_{k=1}^{p_{sub}} a_{k,l} E[x_{m+l}(n-k+1)] \quad (3.23)$$

Si on suppose que le processus aléatoire $\mathcal{U} = \{u(n), n \in \mathbb{Z}\}$ d'entrée du système est à moyenne nulle, les relations du filtrage linéaire permettent de conclure que les

sous-séries obtenues après filtrage et décimation sont aussi toutes centrées et

$$E[e_{l,m}(n)] = 0 \quad (3.24)$$

L'erreur de prédiction linéaire du modèle AR à décalage temporel est donc centrée. Sa fonction d'autocorrélation est, pour $s \geq 0$:

$$\begin{aligned} r_{e_{l,m}}(s) &= E [e_{l,m}(n)e_{l,m}^*(n-s)] \\ &= E \left[\left(x_m(n) + \sum_{k=1}^{p_{sub}} a_{k,l} x_{m+l}(n-k+1) \right) \left(x_m^*(n-s) + \sum_{q=1}^{p_{sub}} a_{q,l}^* x_{m+l}(n-q+1-s) \right) \right] \\ &= r_v(Ms) + \sum_{k=1}^{p_{sub}} a_{k,l} r_v(M(s-k+1)-l) + \sum_{q=1}^{p_{sub}} a_{q,l}^* r_v(M(s+q-1)+l) \\ &\quad + \sum_{q=1}^{p_{sub}} a_{q,l}^* \sum_{k=1}^{p_{sub}} a_{k,l} r_v(M(s+q-k)) \end{aligned}$$

Or l'équation (3.21) permet de simplifier la double somme de l'expression ci-dessus en remarquant que :

$$\sum_{k=1}^{p_{sub}} a_{k,l} r_v(M(s+q-k)) = -r_v(M(s+q-1)+l)$$

ainsi, la fonction d'autocorrélation de l'erreur de prédiction s'écrit :

$$\forall s \geq 0, \quad r_{e_{l,m}}(s) = r_{v_j}(Ms) + \sum_{k=1}^{p_{sub}} a_{k,l} r_{v_j}(M(s-k+1)-l) \quad (3.25)$$

Dans la pratique, on pourra l'estimer en remplaçant les autocorrélations théoriques $r_v(k)$ par leurs estimées $\hat{r}_v(k)$.

On constate d'abord que l'autocorrélation de l'erreur $e_{l,m}(n)$ est elle aussi indépendante de m , ce qui est cohérent avec le fait que les coefficients $a_{k,l}$ sont indépendants de m et que les sous-séries $x_{j,m}(n)$ ont toutes la même densité spectrale de puissance.

Ensuite, on voit que, contrairement au cas de la modélisation AR classique, l'expression de l'autocorrélation de l'erreur ne se simplifie pas pour s'annuler $\forall s \neq 0$. L'erreur n'est donc pas un bruit blanc, sauf dans le cas où $l = M$ pour lequel on retrouve le cas de la modélisation AR classique :

$$\hat{x}_{M,m}(n) = - \sum_{k=1}^{p_{sub}} a_{k,M} x_{m+M}(n-k+1) = - \sum_{k=1}^{p_{sub}} a_{k,M} x_m(n-k)$$

Dans ce cas, (3.25) devient :

$$r_{e_{M,m}}(s) = r_{v_j}(Ms) + \sum_{k=1}^{p_{sub}} a_{k,M} r_{v_j}(M(s-k)) \quad (3.26)$$

où les coefficients de prédiction $a_{k,M}$ vérifient l'équation (3.21) pour $l = M$ soit :

$$r_v(Ms) + \sum_{k=1}^{p_{sub}} a_{k,M} r_v(M(s-k)) = 0 \text{ pour } s > 0.$$

Alors,

$$r_{e_{M,m}}(s) = r_{v_j}(0) \cdot \delta(s) \quad (3.27)$$

où δ est le symbole de Kronecker. Ainsi, dans le cas $l = M$, on retrouve un modèle AR classique avec une erreur de prédiction linéaire théoriquement blanche.

Dans tous les autres cas, pour $l \in \{1, 2, \dots, M-1\}$ et pour $l \geq M+1$, l'erreur de prédiction linéaire n'est pas blanche et possède une fonction d'autocorrélation décrite par (3.25). L'expression de cette autocorrélation nous permet de calculer la DSP associée et de construire ainsi un estimateur spectral de la sous-série $x_m(n)$ (toutes les sous-séries ayant la même DSP).

3.3.5 Analyse Spectrale à base de modèle AR à décalage temporel

Pour $l \geq 1$, l'équation du modèle AR à décalage temporel de l échantillons est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall m \in \{0, \dots, M-1\}, x_m(n) = - \sum_{k=1}^{p_{sub}} a_{k,l} x_{m+l}(n-k+1) + e_{l,m}(n) \quad (3.28)$$

Par transformée de Fourier, on obtient :

$$\forall m \in \{0, \dots, M-1\}, X_m(e^{i2\pi f}) = - \sum_{k=1}^{p_{sub}} a_{k,l} X_{m+l}(e^{i2\pi f}) e^{-i2\pi f(k-1)} + E_{l,m}(e^{i2\pi f}) \quad (3.29)$$

Remarquons que la transformée de Fourier de la sous-suite d'indice $m+l$, $X_{m+l}(e^{i2\pi f})$ peut s'écrire plus simplement. En effet, si on effectue la division euclidienne de

$m + l > 0$ par M , il existe alors un unique couple $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m + l = Mq + r$ avec $0 \leq r \leq M - 1$. Alors,

$$\begin{aligned} X_{m+l}(e^{i2\pi f}) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_{m+l}(n) e^{-i2\pi f n} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v(Mn - m - l) e^{-i2\pi f n} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} v(M(n - q) - r) e^{-i2\pi f n} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_r(n - q) e^{-i2\pi f n} \\ &= e^{-i2\pi f q} X_r(e^{i2\pi f}) \text{ avec } 0 \leq r \leq M - 1. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Cela provient directement de la remarque (3.18) du paragraphe 3.3.2 qui donne la relation entre $x_{m+l}(n)$ et $x_r(n)$ avec $r \in \{0, \dots, M - 1\}$.

De plus, il ne faut pas oublier que si on utilise le dispositif de glissement fréquentiel présenté dans le paragraphe 3.2.2 de ce chapitre, on ramène l'estimation de la densité spectrale de puissance du signal d'une fréquence ν quelconque en MF_j , où F_j est le centre de la sous-bande contenant la fréquence ν . Il n'est donc nécessaire de calculer la valeur de $|X_{j,m}(e^{i2\pi f})|^2$ qu'en $f = MF_j$. Ainsi, en réintroduisant les indices j correspondant au numéro de sous-bande :

$$\forall m \in \{0, \dots, M - 1\}, X_{j,m}(e^{i2\pi MF_j}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{-i2\pi(F_j - \frac{k}{M})m} V_j(e^{i2\pi(F_j - \frac{k}{M})}) \quad (3.31)$$

Or, les filtres-peigne choisis sont pris d'ordre L multiple de M (voir paragraphe 3.2.2 de ce chapitre) afin d'éliminer le recouvrement spectral au centre des sous-bandes. Plus précisément, on a $H_j(e^{i2\pi(F_j - \frac{k}{M})}) = 0$ pour $k \neq 0$, donc $V_j(e^{i2\pi(F_j - \frac{k}{M})}) = 0$ pour $k \neq 0$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} \forall m \in \{0, \dots, M - 1\}, X_{j,m}(e^{i2\pi MF_j}) &= \frac{1}{M} e^{-i2\pi F_j m} V_j(e^{i2\pi F_j}) \\ &= e^{-i2\pi F_j m} X_{j,0}(e^{i2\pi MF_j}) \end{aligned} \quad (3.32)$$

En substituant les équations (3.30) et (3.32) dans l'équation (3.29), on obtient :

$$|X_{j,m}(e^{i2\pi MF_j})|^2 = \frac{|E_{l,m}(e^{i2\pi MF_j})|^2}{\left| 1 + \sum_{k=1}^{p_{sub}} a_{k,l} e^{-i2\pi F_j (Mk - M + l)} \right|^2} \quad (3.33)$$

où $|E_{l,m}(e^{i2\pi f})|^2$ est indépendant de m puisque l'autocorrélation du signal $e_{l,m}(n)$ est elle-même indépendante de m . Par contre, si $l \neq M$, l'erreur $e_{l,m}(n)$ n'est pas un

bruit blanc mais on sait néanmoins calculer son autocorrélation en fonction de celle du signal $v_j(n)$ (voir équation (3.25)). Il sera donc possible d'estimer sa densité spectrale de puissance $S_{e_{l,m}}(e^{i2\pi f})$ en utilisant par exemple une méthode de modélisation *AR* d'ordre p_{sub} .

3.3.6 Algorithme

Soit $\nu \in [0, 1]$ la fréquence à laquelle on veut estimer la densité spectrale d'énergie $|U(e^{i2\pi\nu})|^2$. L'algorithme proposé pour mettre en œuvre la méthode à décalage temporel est résumé ci-dessous.

Pour ν fixé $\in [0, 1]$ et $l \geq 1$:

- 1 - Sélection de la sous-bande j connaissant ν : $j = Ent[2M\nu]$. (où $Ent[.]$ désigne la partie entière).
- 2 - Modulation complexe : glissement uniforme de la densité spectrale de puissance du signal d'entrée $u(n)$ d'une quantité $\Delta_f = F_j - \nu$: $u_\Delta(n) = e^{i2\pi\Delta_f n} u(n)$.
- 3 - Filtrage par le banc de filtres-peigne.
- 4 - Estimation de l'autocorrélation de $v_j(n)$: à partir de l'autocorrélation estimée sur $u_\Delta(n)$, on utilise la connaissance de la réponse impulsionnelle $h_j(n)$ pour en déduire par la formule de Wiener-Lee : $\hat{r}_{v_j}(k) = (h_j * h_{j_{ret}}^* * r_{u_\Delta})(k)$ où $h_{j_{ret}}(n) \stackrel{def}{=} h_j(-n), \forall n$.
- 5 - Estimation spectrale de l'erreur : Pour une valeur fixée du décalage l , on calcule l'autocorrélation du signal $e_{l,m}(n)$ (indépendante de m) en utilisant l'équation (3.25) et on applique une méthode d'estimation spectrale pour en déduire $|E_{l,m}(e^{i2\pi MF_j})|^2$.
- 6 - Estimation spectrale : Pour la valeur de l précédemment fixée, on utilise l'équation (3.33) pour en déduire $|\hat{X}_{j,m}(e^{i2\pi MF_j})|^2$ puis $|\hat{U}_\Delta(e^{i2\pi F_j})|^2 = |\hat{U}(e^{i2\pi\nu})|^2$ par l'équation (3.13).

Des simulations concernant les performances de cette méthode peuvent être trouvées dans le chapitre 4 pour des signaux à spectre "continu" et à spectre "de raies". En

particulier, nous détaillerons les raisons de la méthode d'estimation de $r_{v_j}(k)$ dans le paragraphe 4.2 (étape 4 de l'algorithme).

3.4 Modèle auto-régressif multi-dimensionnel

3.4.1 Introduction

Considérons le schéma de la figure (3.9). On peut considérer l'ensemble des M sous-signaux au temps $n : x_{j,0}(n), x_{j,1}(n), \dots, x_{j,M-1}(n)$ comme un vecteur de \mathcal{F}^M où \mathcal{F} est l'espace vectoriel des variables aléatoires de moment d'ordre 2 fini (défini dans la partie 3.3.2).

$$\underline{x}_j(n) = \begin{bmatrix} x_{j,0}(n) \\ x_{j,1}(n) \\ \dots \\ x_{j,M-1}(n) \end{bmatrix}$$

Une deuxième façon de tirer parti de l'information apportée par les sous-séries et plus précisément de leurs intercorrélations est de se placer dans le cadre de l'analyse spectrale auto-régressive multi-dimensionnelle. Pour un tel signal multi-dimensionnel $\underline{x}_j(n)$, on définit une matrice de corrélations en posant :

$$K_{x_j}(q) = E[\underline{x}_j(n)\underline{x}_j^H(n-q)] \quad (3.34)$$

où H désigne la double opération de transposition et conjugaison. Les termes diagonaux sont les autocorrélations des M sous-séries et les termes non diagonaux représentent leurs intercorrélations. Plus précisément, on a :

$$K_{x_j}(q) = \begin{pmatrix} r_{x_{j,0}}(q) & r_{x_{j,0}x_{j,1}}(q) & \dots & r_{x_{j,0}x_{j,M-1}}(q) \\ r_{x_{j,1}x_{j,0}}(q) & r_{x_{j,1}}(q) & & \\ \vdots & & \ddots & \\ r_{x_{j,M-1}x_{j,0}}(q) & & & r_{x_{j,M-1}}(q) \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

soit

$$K_{x_j}(q) = \begin{pmatrix} r_{v_j}(Mq) & r_{v_j}(Mq+1) & \dots & r_{v_j}(Mq+M-1) \\ r_{v_j}(Mq-1) & r_{v_j}(Mq) & & \\ \cdot & & \cdot & \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \\ r_{v_j}(Mq-(M-1)) & & & r_{v_j}(Mq) \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

Le principe de la modélisation AR multi-dimensionnelle peut se trouver dans de nombreux ouvrages (tel que [1], p. 457). Il est donné ci-dessous pour un ordre p_{sub} :

$$\widehat{x}_j(n) = - \sum_{k=1}^{p_{sub}} A_k \underline{x}_j(n-k) \quad (3.37)$$

où les A_k sont des matrices de coefficients AR , chacune étant de taille $M \times M$. L'erreur $\underline{e}_j(n)$ est définie par la différence entre le vecteur d'observations et le vecteur d'estimés :

$$\underline{e}_j(n) = \underline{x}_j(n) - \widehat{x}_j(n) = \underline{x}_j(n) + \sum_{k=1}^{p_{sub}} A_k \underline{x}_j(n-k) \quad (3.38)$$

3.4.2 Estimation des matrices de prédiction

De même que dans la modélisation AR uni-dimensionnelle, le principe est de calculer les matrices de coefficients A_k qui minimisent la puissance de l'erreur de prédiction du modèle. Ici, celle-ci est définie par la somme des erreurs de prédiction linéaire de chaque composante mono-dimensionnelle ou, ce qui est équivalent, la trace de $K_{e_j}(0)$. D'après [1], cette minimisation conduit aux équations de Yule-Walker dans le cas multi-dimensionnel qui correspondent au système d'équations matriciel suivant :

$$\forall q \in \{1, \dots, p_{sub}\}, K_{x_j}(q) = - \sum_{k=1}^{p_{sub}} A_k K_{x_j}(q-k) \quad (3.39)$$

Chaque matrice A_k étant de taille $M \times M$, on a donc $M^2 p_{sub}$ inconnues à déterminer mais l'écriture de l'équation précédente pour $q \in \{1, \dots, p_{sub}\}$ fournit les $M^2 p_{sub}$ équations qui permettent de résoudre le système. Cette résolution conduit à inverser une

matrice-bloc de matrices de Toeplitz de dimension $Mp_{sub} \times Mp_{sub}$ et cette structure particulière permet, de même que dans le cas uni-dimensionnel d'envisager l'emploi d'un algorithme récursif en ordre (analogue à l'algorithme de Levinson-Durbin) pour le calcul de l'inverse de cette matrice : l'algorithme de Wiggins et Robinson. Le lecteur pourra trouver tous les éléments permettant sa mise en œuvre dans [42]. La principale différence entre les algorithmes de Levinson-Durbin et de Wiggins-Robinson est que dans ce dernier cas, les matrices de coefficients de prédiction avant et arrière ne sont plus liées par une simple relation comme dans le cas uni-dimensionnel. D'autres travaux intéressants sur les matrices-blocs de matrices de Toeplitz, comme [43] peuvent être cités.

3.4.3 Propriétés de l'erreur de prédiction

De même que pour la modélisation *AR* classique et la modélisation *ARDT* décrite dans le paragraphe précédent, on montre facilement que l'erreur de prédiction est centrée :

$$E[\underline{e}_j(n)] = 0 \quad (3.40)$$

En ce qui concerne les propriétés au deuxième ordre, sa matrice de corrélations s'écrit pour $s \geq 0$:

$$\begin{aligned} K_{e_j}(s) &= E \left[\underline{e}_j(n) \underline{e}_j^H(n-s) \right] \\ &= E \left[\left(\underline{x}_j(n) + \sum_{k=1}^{p_{sub}} A_k \underline{x}_j(n-k) \right) \left(\underline{x}_j(n-s) + \sum_{q=1}^{p_{sub}} A_q \underline{x}_j(n-s-q) \right)^H \right] \\ &= K_{x_j}(s) + \sum_{k=1}^{p_{sub}} A_k K_{x_j}(s-k) + \sum_{q=1}^{p_{sub}} K_{x_j}(s+q) A_q^H \\ &\quad + \sum_{k=1}^{p_{sub}} \sum_{q=1}^{p_{sub}} A_k K_{x_j}(s+q-k) A_q^H \end{aligned}$$

En utilisant l'équation (3.39), on peut simplifier l'expression ci-dessus puisque :

$$\sum_{k=1}^{p_{sub}} A_k K_{x_j}(s+q-k) = -K_{x_j}(s+q)$$

d'où :

$$K_{e_j}(s) = K_{x_j}(s) + \sum_{k=1}^{p_{sub}} A_k K_{x_j}(s-k) = 0 \text{ si } s \neq 0 \text{ d'après (3.39). Finalement, la matrice}$$

de corrélations de l'erreur de prédiction s'écrit :

$$\forall s \geq 0, K_{e_j}(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \neq 0 \\ K_{x_j}(0) + \sum_{k=1}^{p_{sub}} A_k K_{x_j}^H(k) & \text{si } s = 0 \end{cases} \quad (3.41)$$

ou plus simplement, en omettant volontairement l'indice j de la sous-bande considérée :

$$\forall s \geq 0, K_e(s) = K_x \delta(s)$$

où δ est le symbole de Kronecker et K_x la matrice définie par le membre de droite de l'équation (3.41).

D'où $\underline{e}(n)$ est un bruit blanc vectoriel, ce qui était une hypothèse au départ le modèle étant AR vectoriel. L'équation (3.41) est l'équation de prédiction au niveau des corrélations.

Les hypothèses sur le bruit sont les suivantes : Cas particulier, $\underline{e}(n)$ est de dimension 2 (signaux réels)

$$\underline{e}(n) = \begin{bmatrix} e_0(n) \\ e_1(n) \end{bmatrix}$$

alors

$$K_e(s) = \begin{bmatrix} E[e_0(n)e_0(n-s)] & E[e_0(n)e_1(n-s)] \\ E[e_1(n)e_0(n-s)] & E[e_1(n)e_1(n-s)] \end{bmatrix}$$

Le bruit est vectoriellement blanc, soit : $K_e(s) = Q\delta(s)$ avec Q matrice symétrique, non diagonale.

Pour $s \neq 0$: $E[e_m(n)e_l(n-s)] = 0$.

Pour $s = 0$: $E[e_m(n)e_l(n-s)] = 0$.

$$K_e(0) = Q = \begin{bmatrix} E[e_0(n)^2] & E[e_0(n)e_1(n)] \\ E[e_1(n)e_0(n)] & E[e_1(n)^2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_0^2 & \sigma_0\sigma_1 \\ \sigma_1\sigma_0 & \sigma_1^2 \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} E[e_m(n)^2] = \sigma_m^2 \\ E[e_m(n)e_l(n)] = \sigma_m\sigma_l \\ E[e_m(n)e_l(n-s)] = 0 \text{ pour } s \neq 0 \end{cases}$$

Les composantes $e_m(n)$ du vecteur $\underline{e}(n)$ sont donc corrélées. C'est une hypothèse au départ et non une conclusion de l'équation (3.41).

Dans la pratique, on pourra estimer la matrice K_x en remplaçant les autocorrélations théoriques $r_v(k)$ par leurs estimées $\hat{r}_v(k)$.

Contrairement aux modèles *ARDT* pour un décalage $l \neq M$, la modélisation *AR* multi-dimensionnelle (*ARM*) permet donc d'obtenir une erreur théoriquement blanche au moins dans le cas où le vecteur $\underline{x}(n)$ se modélise parfaitement comme un véritable *AR* multi-dimensionnel. Dans [44], on montre que ceci est équivalent à dire que chacune des composantes $x_m(n)$ du vecteur $\underline{x}(n)$ se modélise théoriquement comme un *ARMA*.

3.4.4 Analyse Spectrale à base de modèle *AR* multi-dimensionnel

Le principe de l'analyse spectrale multi-dimensionnelle est de calculer une matrice de spectres croisés dans laquelle on trouve les densités spectrales de puissance de chaque composante uni-dimensionnelle sur la diagonale principale et tous les interspectres hors de la diagonale. Plus précisément, la matrice de spectres croisés est définie comme étant la transformée de Fourier discrète de la matrice de corrélations $K_{x_j}(q) = E[\underline{x}_j(n)\underline{x}_j^H(n-q)]$:

$$P_{x_j}(f) = TFD[K_{x_j}(q)] \quad (3.42)$$

où la transformée de Fourier est prise sur chaque composante de la matrice de corrélations. Cette définition donne à la matrice de spectres croisés la propriété de symétrie hermitienne.

Pour les notations, on pose :

$$A = I + \sum_{k=1}^{P_{sub}} A_k e^{-i2\pi fk} \quad (3.43)$$

où I représente la matrice identité de dimension $M \times M$.

Chaque matrice de coefficients de prédiction A_k est de taille $M \times M$ et A est donc

de même taille. On peut trouver dans [1] page 460 l'expression de l'estimateur AR multi-dimensionnel de la matrice de spectres croisés $\widehat{P}_{AR}(f)$:

$$\widehat{P}_{AR}(f) = A^{-1}K_{e_j}(0)A^{-1H} \quad (3.44)$$

et on peut alors retrouver l'estimation AR multi-dimensionnelle de la densité spectrale de puissance de chacune des M sous-séries $x_{j,0}(n), \dots, x_{j,M-1}(n)$ (théoriquement égales mais pas numériquement) sur la diagonale principale de la matrice $\widehat{P}_{AR}(f)$.

3.4.5 Algorithme

De même que dans le paragraphe précédent, on présente l'algorithme à utiliser pour estimer la densité spectrale de puissance du signal d'intérêt $u(n)$ en utilisant la méthode d'estimation AR multi-dimensionnelle décrite ici, permettant d'utiliser l'information fournie par l'intercorrélacion entre les différentes sous-séries issues de la décimation. Notons que la méthode d'estimation spectrale proposée sera aussi couplée aux techniques de glissement fréquentiel par exponentielles complexes et à l'utilisation du banc de filtres-peigne pour éliminer le recouvrement et les discontinuités du spectre.

Soit $\nu \in [0, 1]$ la fréquence à laquelle on veut estimer la densité spectrale de puissance $S_u(\nu)$. L'algorithme proposé est résumé ci-dessous.

Pour ν fixé $\in [0, 1]$:

- 1 - Sélection de la sous-bande j connaissant ν : $j = Ent[2M\nu]$. (où $Ent[.]$ désigne la partie entière).
- 2 - Modulation complexe : glissement uniforme de la densité spectrale de puissance du signal d'entrée $u(n)$ d'une quantité $\Delta_f = F_j - \nu$: $u_\Delta(n) = e^{i2\pi\Delta_f n}u(n)$.
- 3 - Filtrage par le banc de filtres-peigne.
- 4 - Estimation de l'autocorrélacion de $v_j(n)$: à partir de l'autocorrélacion estimée sur $u_\Delta(n)$, on utilise la connaissance de la réponse impulsionnelle $h_j(n)$ pour en déduire par la formule de Wiener-Lee : $\widehat{r}_{v_j}(k) = (h_j * h_{j_{ret}}^* * r_{u_\Delta})(k)$ où $h_{j_{ret}}(n) \stackrel{def}{=} h_j(-n), \forall n$.

- 5 - Estimation spectrale : On utilise l'algorithme de Wiggins-Robinson pour estimer les p_{sub} matrices de coefficients A_k et la matrice $K_{e_j}(0)$. On utilise alors l'équation (3.44) pour obtenir la matrice de spectres croisés $\widehat{P}_{AR}(f)$ en $f = MF_j$ et on moyenne les termes de sa diagonale principale pour obtenir $\left| \widehat{X}_{j,m}(e^{i2\pi MF_j}) \right|^2$.
- 6 - Reconstruction de la densité spectrale de puissance de $u(n)$: On utilise l'équation (3.13) pour en déduire $\left| \widehat{U}_{\Delta}(e^{i2\pi F_j}) \right|^2 = \left| \widehat{U}(e^{i2\pi\nu}) \right|^2$, puis $S_u(\nu)$.

Des simulations concernant les performances de cette méthode d'estimation AR multi-dimensionnelle dans les sous-bandes sont données dans le chapitre 4 pour des signaux à spectre "continu" et à spectre "de raies".

3.5 Conclusion

Ce chapitre a permis de présenter les principaux points originaux de notre contribution à l'analyse spectrale après découpage en sous-bandes.

En premier, nous proposons d'utiliser une technique de glissement fréquentiel, permettant de ramener les fréquences d'intérêt en milieu de sous-bande, là où l'estimation spectrale est la plus performante [7] et où le recouvrement spectral lié aux filtres adjacents est moindre. Deux techniques ont été proposées : une à base de déformation spectrale par filtres de Laguerre [38] et une autre, encore plus simple, par multiplication par des exponentielles complexes appropriées [39].

En second, couplé à cette technique de glissement fréquentiel, nous proposons d'utiliser un banc de filtres très simples, les filtres-peigne. L'intérêt de ces filtres réside non seulement dans leur faible coût d'implantation (filtres RIF à coefficients identiques) mais aussi et surtout dans la garantie qu'ils apportent d'éliminer le recouvrement spectral en milieu de chacune des sous-bandes. Ceci nous permet d'imaginer

un algorithme d'estimation spectrale, lié à l'utilisation conjointe du glissement fréquentiel et du banc de filtres-peigne, conduisant à une élimination totale du phénomène de recouvrement spectral et assurant la continuité entre les différents spectres des sous-bandes [37], [38]. Rappelons que le recouvrement spectral et la discontinuité entre les spectres des sous-bandes sont les deux inconvénients majeurs de l'estimation spectrale après découpage en sous-bande. Les solutions proposées sont simples à mettre en œuvre, même si l'algorithme proposé peut paraître lourd en coût calculatoire, puisque les différents points de la densité spectrale sont estimés l'un après l'autre. Toutefois, l'algorithme proposé peut facilement se paralléliser en utilisant la structure parallèle inhérente à tout banc de filtres. D'autre part, le problème du coût calculatoire a été volontairement mis de côté dans toute notre étude. Notre souci repose plus sur la proposition de méthodes permettant d'éviter la mise en place de filtres proches de filtres idéaux (QMF,...) qui sont souvent difficiles à construire pour une application donnée.

Enfin, nous nous sommes intéressés à la méthode d'estimation spectrale utilisée dans chacune des sous-bandes. En remarquant que la décimation placée en sortie de chacun des filtres permet de construire M versions du même processus aléatoire décimé, nous avons proposé deux méthodes d'analyse spectrale paramétrique permettant d'utiliser conjointement ces M réalisations du processus aléatoire.

La première méthode proposée est originale ; nous l'avons appelée l'*ARDT* : *AR* à décalage temporel. Basée sur une récursion de type *AR*, elle permet de faire intervenir les différentes réalisations du processus aléatoire. Un des principaux intérêts de la modélisation *ARDT* est que l'estimation des paramètres du modèle se fait à l'aide d'algorithmes classiques d'estimation *AR*. Nous avons construit un estimateur spectral à partir de ce modèle *ARDT*.

La deuxième méthode d'analyse spectrale proposée est connue dans la littérature mais n'a pas été, à notre connaissance, utilisée dans le contexte de l'analyse spectrale en sous-bandes. Nous proposons d'appliquer la modélisation *AR* multi-dimensionnelle

au vecteur constitué de M échantillons, chacun des échantillons étant pris dans chacune des M versions du processus aléatoire décimé.

Ce chapitre avait uniquement pour but de présenter les différents points proposés pour améliorer l'analyse spectrale en sous-bandes. Le chapitre suivant s'inscrit naturellement dans la suite de ce chapitre et est tout aussi important dans la contribution que nous souhaitons apporter dans l'analyse spectrale en sous-bandes. En effet, dans le chapitre suivant, nous présentons la mise en place et les performances des différents points abordés dans le présent chapitre : le glissement fréquentiel, l'intérêt des filtres-peigne et surtout, les performances de l'*ARDT* et de l'*AR* multi-dimensionnel.

Chapitre 4

Évaluation des performances

4.1 Introduction

Ce chapitre est voué à la présentation de divers résultats concernant les méthodes décrites précédemment. Dans la première section, on s'intéressera aux aspects pratiques de l'estimation de l'autocorrélation des différents signaux $u(n)$, $u_{\Delta}(n)$, $v_j(n)$ et $x_{j,m}(n)$ du banc de filtres d'analyse car elle est nécessaire à la mise des œuvre des méthodes paramétriques utilisées pour l'estimation spectrale.

Dans les sections suivantes de ce chapitre, on présentera, les résultats concernant l'analyse spectrale par modélisation *AR* classique dans les sous-bandes présentée au chapitre 2. On mettra en évidence des résultats concernant la variance de l'estimateur de la fréquence (pour un signal sinusoïdal bruité), la puissance de l'erreur de prédiction linéaire, le rapport signal à bruit local et le nombre de conditionnement des matrices d'autocorrélation. Ces simulations seront effectuées dans le cadre d'un banc de filtres uniforme de filtres-peigne et le banc de filtres sera précédé d'un dispositif de glissement spectral par exponentielles complexes afin de respecter la condition d'élimination du recouvrement spectral (voir partie 3.2.2). La méthode de glissement fréquentiel utilisant les bases de Laguerre et décrite dans la section 1 du chapitre 3 ne sera pas utilisée pour être couplée aux méthodes *ARDT* et *ARM* car elle ne permet qu'une diminution du recouvrement spectral alors que la méthode par modulation complexe et filtres-peigne l'élimine totalement au centre des sous-bandes.

Enfin, signalons qu'on considérera selon le cas des signaux à spectre de raies ou des signaux à spectre continu afin de bien mettre en évidence les différents avantages ou inconvénients selon le cas et des simulations sur des signaux réels (enregistrement de notes de musique ou signaux d'engrenages très riches spectralement) seront menées.

4.2 Estimation des autocorrélations

Considérons le schéma de la figure (4.1). En utilisant la formule de Wiener-Lee, on peut relier l'autocorrélation théorique du signal filtré $v_j(n)$ à celle du signal $u_\Delta(n)$, puis à celle du signal original $u(n)$.

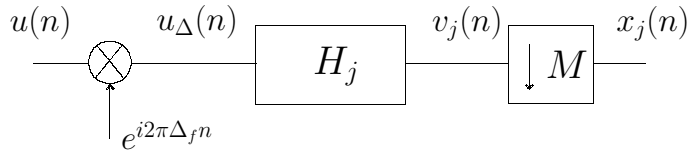


FIG. 4.1 – $j^{\text{ème}}$ branche du banc de filtres.

on a alors :

$$r_{u_\Delta}(k) = e^{i2\pi\Delta_f k} r_u(k) \quad (4.1)$$

et

$$r_{v_j}(k) = (h_j * h_{j_{ret}}^* * r_{u_\Delta})(k) \quad (4.2)$$

expression dans laquelle $h_{j_{ret}}$ note la réponse impulsionnelle du $j^{\text{ème}}$ filtre “retournée”, i.e., $h_j(-k)$.

Si on utilise des filtres à réponse impulsionnelle finie (comme c'est le cas des filtres-peigne présentés dans la partie 3.2.2, page 61), on peut facilement calculer ce produit de convolution puisque la somme le définissant sera alors à support borné :

$$r_{v_j}(k) = \sum_{s=-(L-1)}^{L-1} r_{h_j}(s) r_{u_\Delta}(k-s) \text{ avec } r_{h_j}(s) = \sum_{n=0}^{L-1} h_j(n) h_j^*(n-s) \quad (4.3)$$

où L est l'ordre du filtre-peigne considéré. Dans ce cas, $r_{h_j}(s)$ s'écrit :

$$r_{h_j}(s) = L\Lambda_L(s) \quad (4.4)$$

où $\Lambda_L(s)$ désigne une fenêtre triangulaire de hauteur 1 et de demi-base L , résultat de la convolution de $\{h_j(n)\}$ avec elle-même, sachant que :

$$h_j(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = 0, \dots, L - 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

La formule liant les autocorrélations des signaux avant et après décimation (voir équation (2.29), page 45) s'écrit plus simplement :

$$r_{x_j}(k) = r_{v_j}(Mk) \quad (4.5)$$

Ces considérations amènent à envisager dans la pratique trois possibilités pour estimer l'autocorrélation commune des sous-séries $x_{j,m}(n)$ issues de la $j^{\text{ème}}$ sous-bande. Elles sont résumées ci-dessous :

- (a) - Estimation de $\widehat{r}_u(k)$ à partir des échantillons connus de $u(n)$ puis calcul de $\widehat{r}_{v_j}(k)$ par l'équation (4.1) et la formule de Wiener-Lee (4.3) et enfin calcul de $\widehat{r}_{x_j}(k)$ en utilisant l'équation (4.5).
- (b) - Modulation complexe et filtrage de $u(n)$ pour obtenir les échantillons de $v_j(n)$ puis estimation de $\widehat{r}_{v_j}(k)$ à partir de ces échantillons et calcul de $\widehat{r}_{x_j}(k)$ en utilisant l'équation (4.5).
- (c) - Modulation complexe, filtrage et décimation de $u(n)$ pour obtenir les échantillons des M sous-séries $x_{j,m}(n)$ puis estimation des $\widehat{r}_{x_{j,m}}(k)$ (toutes théoriquement égales) à partir de ces échantillons et moyenne des différentes estimations pour diminuer la variance.

Des méthodes identiques peuvent être dérivées pour l'estimation des intercorrélations entre les différentes sous-séries $x_{j,m}(n)$ mais pour la clarté du raisonnement, on ne s'intéressera ci-dessous qu'à l'estimation de leur autocorrélation commune $r_{x_j}(k)$.

La méthode (a) consiste à estimer l'autocorrélation directement sur le signal original $u(n)$, puis à utiliser l'équation (4.1), la formule de Wiener-Lee (4.3) et l'équation (4.5). On obtient l'estimateur suivant :

$$\widetilde{r}_{x_j}(k) = \sum_{s=-(L-1)}^{L-1} r_{h_j}(s) e^{i2\pi\Delta_f(Mk-s)} \widehat{r}_u(Mk-s) \quad (4.6)$$

où r_{h_j} est défini dans l'équation (4.3) et \widehat{r}_u représente un des estimateurs de la fonction d'autocorrélation, rappelés dans le chapitre 1.

La méthode (b) consiste à estimer l'autocorrélation directement sur le signal modulé et filtré $v_j(n)$ en profitant de l'information apportée par la totalité des N échantillons disponibles pour diminuer la variance des estimateurs (biaisé ou non biaisé). On obtient alors l'estimateur :

$$\widehat{r}_{x_j}(k) = \widehat{r}_{v_j}(Mk) \quad (4.7)$$

Enfin, la méthode (c) conduit à l'estimateur suivant :

$$\widetilde{r}_{x_j}(k) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \widehat{r}_{x_j,m}(k) \quad (4.8)$$

où $\widehat{r}_{x_j,m}(k)$ est l'un des estimateurs quelconque de l'autocorrélation (biaisé ou non biaisé).

Les méthodes (b) et (c) sont très proches l'une de l'autre. La méthode (b) revient à utiliser un estimateur de corrélation sur les $\{v_j(n)\}$ mais à n'estimer cette autocorrélation qu'en des points de la forme Mk :

$$\widehat{r}_{x_j}(k) = \frac{1}{C} \sum_{n=Mk}^{N-1} v_j(n) v_j^*(n - Mk) \quad (4.9)$$

sachant que N est le nombre d'échantillons disponibles de signal original $u(n)$ et que C prendra des valeurs différentes suivant que l'estimateur de corrélation considéré est biaisé ou non biaisé.

La méthode (c) consiste à moyenner les résultats des estimations d'autocorrélation directement effectuée sur les échantillons décimés :

$$\tilde{r}_{x_j}(k) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1}{C} \sum_{n=k}^{N_{sub}-1} x_{j,m}(n)x_{j,m}^*(n-k), \quad (4.10)$$

$\{x_{j,m}(n)\}$ étant l'une des versions décimées de $\{v_j(n)\}$.

Notons que les méthodes (b) et (c) sont statistiquement équivalentes au premier et second ordre. En effet, les biais des estimateurs $\tilde{r}_{x_j}(k)$ et $\widehat{r}_{x_j,m}(k)$ sont clairement identiques pour ces deux méthodes. En ce qui concerne les variances, on a directement pour la méthode (b) :

$$Var[\widehat{r}_{x_j}(k)] = Var[\widehat{r}_{v_j}(Mk)] \quad (4.11)$$

Pour la méthode (c), on a d'après les résultats du tableau de la partie 1.2.2 :

$$\begin{aligned} Var[\widehat{r}_{x_j,m}(k)] &= \frac{M}{N} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left(r_{x_j,m}^2(l) + r_{x_j,m}(l+k)r_{x_j,m}(l-k) \right) \\ &= \frac{M}{N} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left(r_{v_j}^2(Ml) + r_{v_j}(Ml+Mk)r_{v_j}(Ml-Mk) \right) \end{aligned} \quad (4.12)$$

L'équation (4.12) fait intervenir la fonction d'autocorrélation de v_j en des points particuliers, tous multiples de M . Afin de fournir une autre expression de $Var[\widehat{r}_{x_j}(k)]$, il est intéressant de remarquer que pour toute fonction discrète $\{g(l), l \in \mathbb{Z}\}$, on a :

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} g(Ml) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} g(l)J_M(l) \quad (4.13)$$

avec

$$J_M(l) = \begin{cases} 1 & \text{si } l \text{ est multiple de } M \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.14)$$

Une autre expression de $J_M(l)$ peut être trouvée en écrivant son développement en série de Fourier :

$$J_M(l) = \frac{1}{M} \sum_{s=0}^{M-1} e^{i\frac{2\pi ls}{M}} \quad (4.15)$$

En appliquant (4.13) avec $g(l) = r_{v_j}^2(l) + r_{v_j}(l + Mk)r_{v_j}(l - Mk)$, l'équation (4.12) devient :

$$\begin{aligned} Var[\widehat{r}_{x_{j,m}}(k)] &= \frac{M}{N} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left(r_{v_j}^2(l) + r_{v_j}(l + Mk)r_{v_j}(l - Mk) \right) \frac{1}{M} \sum_{s=0}^{M-1} e^{i\frac{2\pi ls}{M}} \\ &= \sum_{s=0}^{M-1} \frac{1}{N} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left[\left(r_{v_j}(l) e^{i\frac{\pi ls}{M}} \right)^2 + \left(r_{v_j}(l + Mk) e^{i\frac{\pi(l+Mk)s}{M}} \right) \left(r_{v_j}(l - Mk) e^{i\frac{\pi(l-Mk)s}{M}} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.16)$$

En définissant le signal $w_{j,s}(n)$ par

$$w_{j,s}(n) = v_j(n) e^{i\frac{\pi ns}{M}} \quad (4.17)$$

on a alors

$$r_{w_{j,s}}(l) = r_{v_j}(l) e^{i\frac{\pi ls}{M}} \quad (4.18)$$

En remarquant que l'expression obtenue dans (4.16) fait intervenir la variance de l'autocorrélation estimée de $r_{w_{j,s}}(l)$ (voir les résultats du tableau page 6), on en déduit :

$$Var[\widehat{r}_{x_{j,m}}(k)] = \sum_{s=0}^{M-1} Var[\widehat{r}_{w_{j,s}}(Mk)] \quad (4.19)$$

et comme $\forall k, Var[\widehat{r}_{w_{j,s}}(k)] = Var[\widehat{r}_{v_j}(k)]$, indépendamment de s ,

$$Var[\widehat{r}_{x_{j,m}}(k)] = MVar[\widehat{r}_{v_j}(Mk)] \quad (4.20)$$

En reprenant l'expression de $\widetilde{r}_{x_j}(k)$ donnée par (4.8), on obtient :

$$Var[\widetilde{r}_{x_j}(k)] = Var[\widehat{r}_{v_j}(Mk)] \quad (4.21)$$

Finalement :

$$\boxed{Var[\widetilde{r}_{x_j}(k)] = Var[\widehat{r}_{x_j}(k)]} \quad (4.22)$$

ce qui montre que les estimateurs (b) et (c) sont bien équivalents au 2^{ème} ordre. Il reste donc à comparer les méthodes d'estimation (a) et (b). La modulation complexe n'intervient pas puisque $\widehat{r}_{u_\Delta}(k) = e^{i2\pi\Delta_f k} \widehat{r}_u(k)$ où $\widehat{r}_u(k)$ est l'un des estimateurs quelconque (biaisé ou non biaisé) de l'autocorrélation et $u_\Delta(n) = e^{i2\pi\Delta_f n} u(n)$.

La seule différence réside donc dans l'estimation de l'autocorrélation sur les échantillons du signal original $u(n)$ ou bien sur les échantillons du signal filtré $v_j(n)$. Dans le cas de filtres-peigne, une expression plus précise de l'estimateur (a) est donnée par les équations (4.4) et (4.6) :

$$\widetilde{r}_{x_j}(k) = \sum_{s=-(L-1)}^{L-1} L\Lambda_L(s)e^{i2\pi\Delta_f(Mk-s)}\widehat{r}_u(Mk-s) \quad (4.23)$$

Cet estimateur est non biaisé si l'estimateur utilisé pour \widehat{r}_u est lui-même non biaisé.

Le calcul de la variance de $\widehat{r}_{x_j}(k)$ est plus compliqué car il fait intervenir non seulement la variance de $\widehat{r}_u(l)$ mais aussi des termes de covariance entre $\widehat{r}_u(l)$ et $\widehat{r}_u(n)$, $n \neq l$. L'expression générale de la variance de l'estimateur (a) est difficile à obtenir et il est donc délicat de comparer cet estimateur à l'estimateur (b) ou (c) pour lesquels l'expression de la variance a pu être donnée.

Suivant le type de signal envisagé $\{u(n)\}$ à l'entrée de notre système, les résultats concernant la variance de l'estimateur d'autocorrélation des signaux issus de la $j^{\text{ème}}$ sous-bande $\{x_{j,m}(n)\}$ pencheront en faveur de l'un ou l'autre de ces estimateurs.

Le choix entre les méthodes (a) d'une part et (b) ou (c) d'autre part a donc été basé sur un autre type de critère : la méthode (a) assure que la condition d'élimination du recouvrement spectral donnée par l'équation (3.12) est exactement respectée, contrairement aux méthodes (b) ou (c) qui ne la respectent qu'approximativement. C'est pourquoi la méthode (a) a été choisie pour mener les différentes simulations présentées dans la suite de ce chapitre.

4.3 Choix des paramètres de modélisation des sous-bandes

Afin de déterminer les paramètres M et p_{sub} pour l'estimation spectrale paramétrique dans les sous-bandes, on peut dans la pratique utiliser la procédure suivante :

On commence par déterminer l'ordre de modélisation paramétrique large-bande p sur le signal original $\{u(n)\}$. Ce choix peut être déterminé en particulier par le nombre maximal de points de l'estimateur de la fonction d'autocorrélation pour lesquels on considère que la variance n'est pas trop forte ou par n'importe quel critère de sélection de l'ordre de modélisation paramétrique (très nombreux dans la littérature [1], [17], ...).

Le nombre de points de l'estimateur d'autocorrélation de $\{u(n)\}$ utilisés lorsqu'on fait de l'estimation spectrale paramétrique d'ordre p_{sub} sur les signaux issus d'un banc de filtres à M sous-bandes est Mp_{sub} . On se fixe donc $Mp_{sub} = p$.

Comme on l'a vu dans le chapitre 2, les performances de l'estimation spectrale augmentent avec M . Le nombre maximal de sous-bandes peut alors être déterminé par l'algorithme suivant :

- $M \leftarrow 1$
- Tant que $p_{sub} = p/M$ est un ordre de modélisation suffisant pour tous les signaux de sous-bandes (au sens d'un critère d'ordre, par exemple), faire :
 - $M \leftarrow M + 1$
- Fin faire.

4.4 Intérêt des modèles *ARDT* dans les sous-bandes

Nous allons étudier l'estimateur spectral *ARDT* proposé dans le chapitre 3, afin de mettre en évidence son intérêt par rapport à une analyse spectrale classique dans les sous-bandes ou par rapport à une analyse sur le signal original.

4.4.1 Signaux à spectre de raies

Dans le cas d'un signal à sinusoïdal noyé dans un bruit blanc, on va comparer la variance de l'estimateur de la fréquence par trois méthodes : analyse spectrale *AR* large-bande, modélisation *AR* dans les sous-bandes avec dispositif de glissement fréquentiel et analyse spectrale fournie par des modèles *ARDT* avec différents décalages. Plus précisément, le signal original $u(n)$ est tel que :

$$u(n) = A_1 \cos(2\pi f_1 n + \phi_1) + b(n), n = [0, \dots, N - 1] \quad (4.24)$$

où $b(n)$ est un bruit blanc gaussien centré, de puissance σ_b^2 . Le rapport signal à bruit est $SNR = \frac{A_1^2}{2\sigma_b^2}$.

Les paramètres choisis sont : $A_1 = 1$, $f_1 = 0.1$, $\sigma_b^2 = 0.8$ et $N = 100$, ce qui correspond à un SNR de l'ordre de -2 dB. La variance expérimentale de l'estimateur de la fréquence f_1 est obtenue à partir de 100 réalisations (tirages de Monte-Carlo) pour chacun des trois estimateurs. Pour les modélisations *ARDT* dans les sous-bandes, on choisit d'utiliser $M = 4$ sous-bandes et un ordre de modélisation $p_{sub} = 8$. L'estimateur de la fréquence de la sinusoïde pour cette méthode est fourni par la moyenne arithmétique des estimateurs issus des modèles *ARDT* avec des décalages $l = M-2, M-1, M, M+1, M+2$ car les simulations ont montré que les décalages situés autour de $l = M$ (cas de la modélisation *AR* classique pour laquelle l'erreur de prédiction linéaire est théoriquement blanche) donnaient les meilleurs résultats. Toujours dans l'esprit d'une comparaison objective, on a choisi un ordre $p = Mp_{sub} = 32$ pour la modélisation *AR* large-bande.

La figure (4.2) montre les différentes réalisations obtenues pour les décalages considérés. Le principal intérêt de la méthode est que pour une réalisation fixée du signal original $\{u(n)\}$, on obtient ainsi plusieurs estimateurs différents du spectre, utilisant chacun l'information fournie par une intercorrélacion différente entre les différentes sous-séries issues des sous-bandes.

Un autre intérêt de l'estimation *AR* dans les sous-bandes consiste en la diminution de la puissance de l'erreur de prédiction linéaire de modélisation *AR* (voir paragraphe

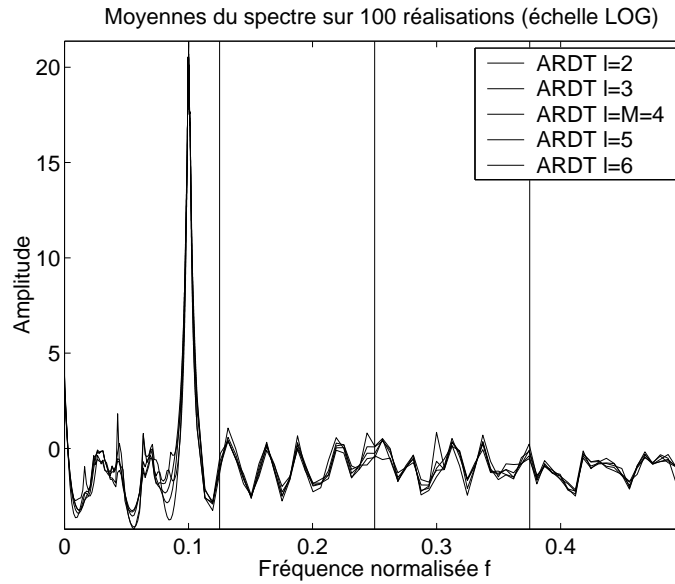


FIG. 4.2 – Moyenne des 100 réalisations par la méthode *ARDT* pour différents décalages l .

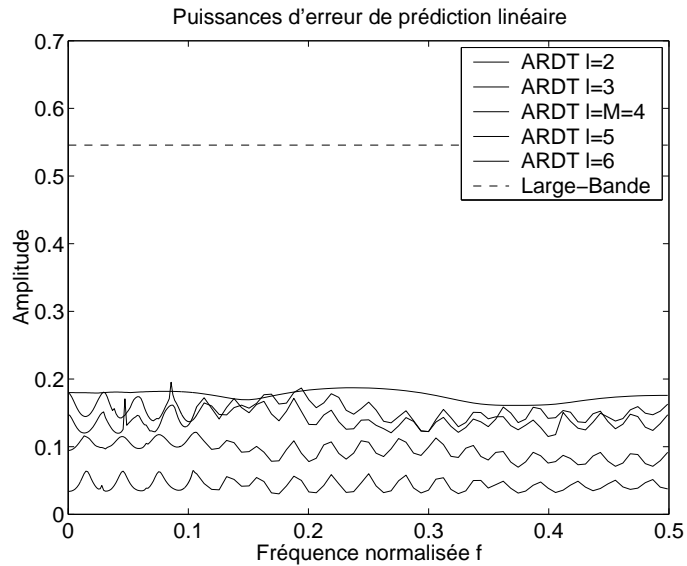


FIG. 4.3 – Puissances d'erreur de prédiction linéaire pour les modèles *ARDT* et l'estimation *AR* large-bande.

2.3.4 du chapitre 2). Sur la figure (4.3), on a tracé la puissance de l'erreur de prédiction linéaire de modélisation AR large-bande (directement sur le signal original). En ce qui concerne la modélisation $ARDT$, on a tracé l'amplitude de la densité spectrale de puissance de l'erreur $e_{l,m}(n)$ (indépendante de m) en MF_j pour chaque fréquence ν . Celle-ci correspond à la puissance de l'erreur de prédiction linéaire de modélisation AR dans les sous-bandes dans le cas $l = M$. On constate expérimentalement que la propriété de réduction de la puissance de l'erreur dans les sous-bandes est conservée par la modélisation $ARDT$, même pour des décalages $l \neq M$.

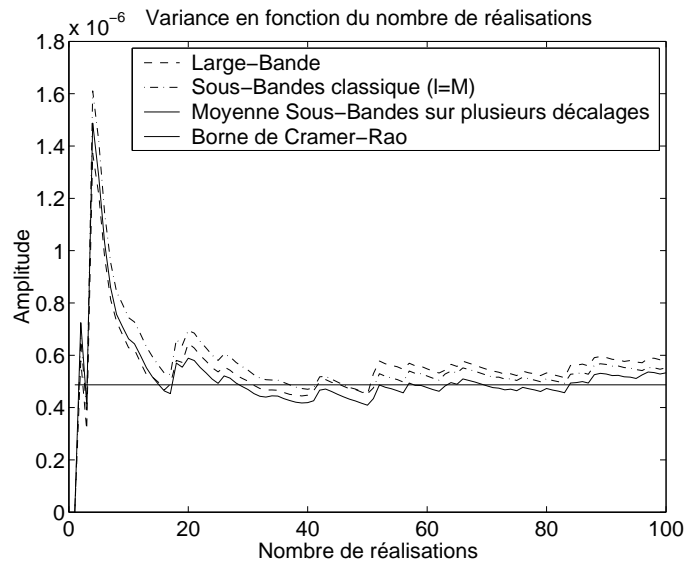


FIG. 4.4 – Variance sur l'estimation de f_1 en fonction du nombre de réalisations.

On constate sur la figure (4.4) qu'au sens du critère de la variance de l'estimateur de fréquence de raies pures, une simple moyenne arithmétique effectuée sur les estimateurs issus des modélisations $ARDT$ avec plusieurs décalages permet de réduire la variance de cette estimation par rapport à une modélisation AR classique dans les sous-bandes (qui elle-même est meilleure qu'une simple modélisation AR large-bande) : au bout de 100 réalisations, on obtient des variances de 5.92×10^{-7} , 5.52×10^{-7} et 5.33×10^{-7} respectivement pour les estimations large-bande, sous-bande classique et $ARDT$ avec plusieurs décalages.

4.4.2 Signaux à spectre continu

On considère maintenant le cas d'un signal à spectre continu, de type *MA* pur bruité. Ce signal est le résultat du filtrage par un filtre à réponse impulsionnelle finie d'un bruit blanc centré $w(n)$ de puissance σ_w^2 auquel on ajoute un autre bruit blanc gaussien indépendant $z(n)$ de puissance σ_z^2 :

$$u(n) = \sum_{k=0}^q b_k w(n-k) + z(n), b_0 = 1, n = [0, \dots, N-1] \quad (4.25)$$

où q est l'ordre du modèle *MA*.

Dans la pratique, le signal choisi est théoriquement un signal de type *MA* d'ordre $q = 6$ et les paramètres b_1, \dots, b_6 sont respectivement $-0.1837, 0.5373, -0.3252, 0.4351, 0.1419$ et 0.0174 . Le bruit $z(n)$ a une puissance $\sigma_z^2 = 0.8$.

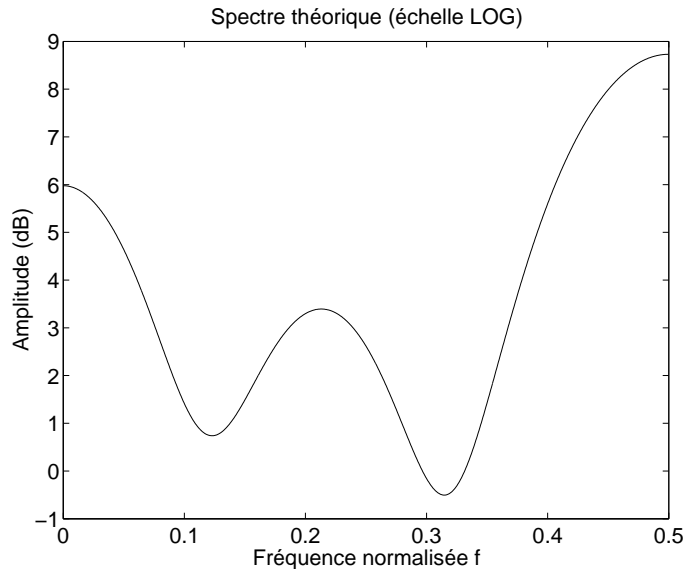


FIG. 4.5 – Spectre théorique du signal *MA* étudié.

La figure (4.5) présente le spectre théorique de ce signal.

Dans la simulation présentée ci-dessous, on compare les estimations du spectre de $u(n)$ par la méthode de modélisation *AR* large-bande et la méthode *ARDT* avec

des décalages $l = M - 2, M - 1, M, M + 1, M + 2$. Le nombre de sous-bandes est $M = 4$ et les ordres de modélisation sont de $p_{sub} = 4$ pour l'*ARDT* et $p = 16$ pour la modélisation *AR* large-bande.

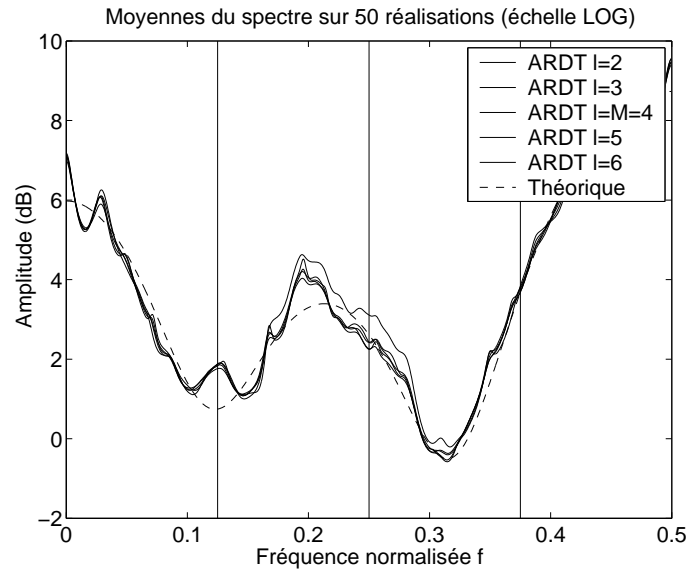


FIG. 4.6 – Moyenne des 50 réalisations par la méthode *ARDT* pour différents décalages l et spectre théorique.

Sur la figure (4.6), on a tracé les différentes réalisations obtenues pour les décalages envisagés et le spectre théorique du signal. On voit qu'on pourrait choisir de moyenner ces différentes estimations afin d'améliorer la qualité de l'estimation spectrale.

Enfin, la figure (4.7) présente les améliorations en termes de puissance d'erreur de prédiction linéaire.

4.5 Intérêt des modèles *AR* multi-dimensionnels

Comme on l'a vu dans le paragraphe 3.4 du chapitre 3, la modélisation *AR* multi-dimensionnelle est un autre moyen de tirer parti de la connaissance des intercorrélations entre les différentes sous-séries issues de la décimation des signaux filtrés par les bancs de filtres. Son avantage principal comparé à la méthode précédente est de

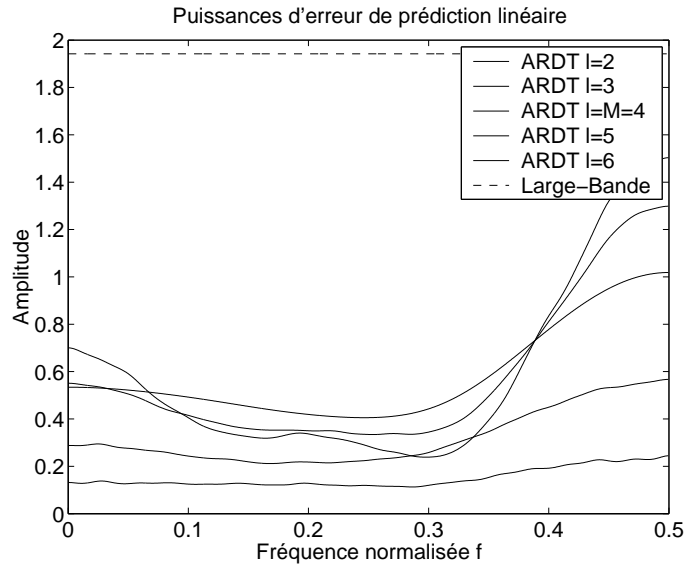


FIG. 4.7 – Puissances d’erreur de prédiction linéaire pour les modèles *ARDT* et l’estimation *AR* large-bande.

fournir une erreur de modélisation théoriquement blanche. En revanche, la taille des matrices à inverser sera M fois plus importante que dans le cas de l’*ARDT* (taille Mp_{sub} au lieu de p_{sub}), ce qui va avoir tendance à dégrader leur conditionnement.

4.5.1 Signaux à spectre de raies

Dans le cas d’un signal sinusoïdal noyé dans un bruit blanc, on va comparer la variance de l’estimateur de la fréquence par la méthode de modélisation *AR* multi-dimensionnelle dans les sous-bandes, associée au dispositif de glissement fréquentiel présenté paragraphe 3.2.2, chapitre 2 par rapport à l’estimation *AR* “large-bande” effectuée directement à partir des échantillons du signal original $u(n)$. Comme précédemment, le signal $u(n)$ s’écrit :

$$u(n) = A_1 \cos(2\pi f_1 n + \phi_1) + b(n), n = [0, \dots, N - 1] \quad (4.26)$$

où $b(n)$ est un bruit blanc gaussien centré, de puissance σ_b^2 . Les paramètres du signal choisis sont les mêmes que précédemment : $A_1 = 1$, $f_1 = 0.1$, $\sigma_b^2 = 0.8$ et $N = 100$. La variance expérimentale de l’estimateur de la fréquence f_1 est obtenue à partir de 200 réalisations (tirages de Monte-Carlo) pour les deux estimateurs et on a choisi $M = 8$

sous-bandes et un ordre $p_{sub} = 2$ dans chacune d'entre-elles. Même si cet ordre de modélisation pour les sous-bandes paraît a priori très faible, on va voir que le fait de maintenir le produit Mp_{sub} constant suffit à améliorer l'estimation de fréquence de la sinusoïde. Pour la modélisation *AR* large-bande, on a choisi un ordre $p = 23$.

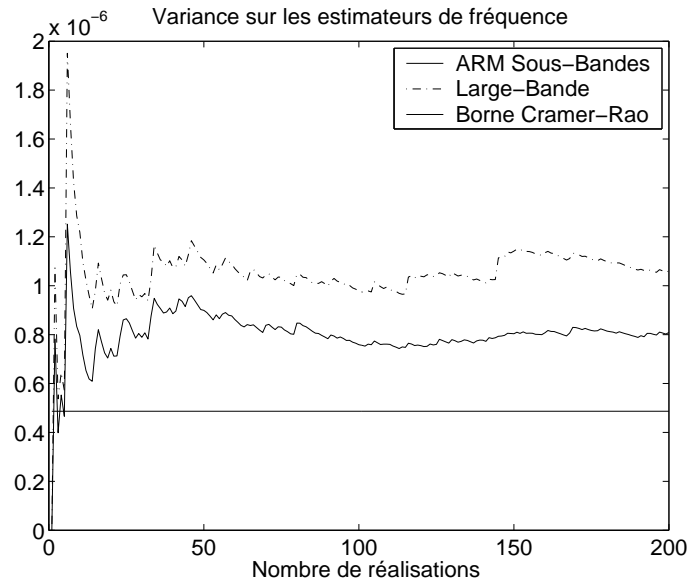


FIG. 4.8 – Variance sur l'estimation de f_1 en fonction du nombre de réalisations.

On constate sur la figure (4.8) que la modélisation *ARM* permet de diminuer la variance sur l'estimateur de fréquence et de se rapprocher de la borne de Cramer-Rao. Les variances finales obtenues au bout de 200 réalisations sont de 1.06×10^{-6} pour l'estimation *AR* large-bande et 8.09×10^{-7} pour l'estimation *ARM* dans les sous-bandes.

4.5.2 Signaux à spectre continu

Avec le même signal et les mêmes paramètres de simulation que dans le paragraphe 4.4.2, on a tracé la variance des estimateurs spectraux par modélisation *AR* large-bande et modélisation *AR* multi-dimensionnelle dans les sous-bandes. Les variances expérimentales des estimateurs spectraux sont obtenues à partir de 50 réalisations

(tirages de Monte-Carlo).

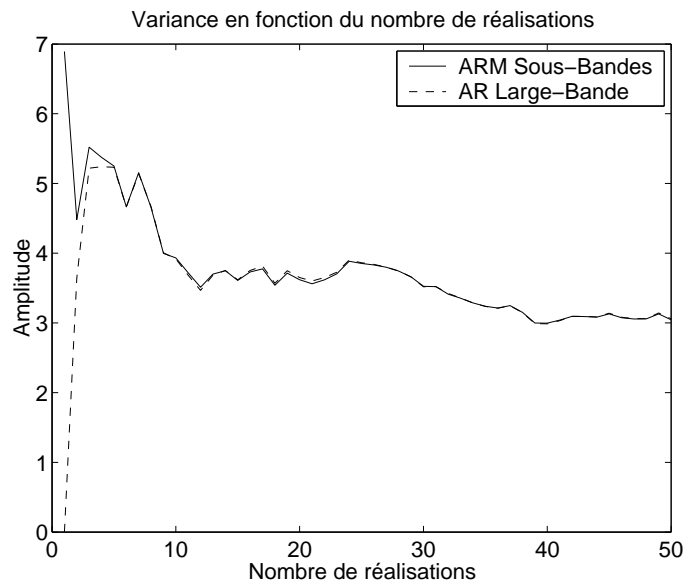


FIG. 4.9 – Variance sur l’estimation du spectre en fonction du nombre de réalisations.

Les figures (4.9) et (4.10) montrent que la méthode *AR* multi-dimensionnelle n’a que peu d’intérêt dans le cas d’un signal à spectre continu par rapport à une simple modélisation *AR* large-bande.

4.6 Analyse spectrale dans les sous-bandes

Comme on l’a vu dans les 2 paragraphes précédents, il est possible d’améliorer encore l’estimation spectrale dans les sous-bandes en considérant les méthodes présentées au chapitre 3 et qui permettent de prendre en considération l’information fournie par l’intercorrélacion entre les sous-signaux issus des sous-bandes. Néanmoins, il faut noter que dans certains cas, une estimation spectrale classique dans les sous-bandes (n’utilisant que l’autocorrélacion des signaux de sous-bande et pas leur intercorrélacion) peut suffire à améliorer notablement les performances de l’estimation spectrale par rapport à l’estimation large-bande (effectuée directement sur les échantillons du signal original $\{u(n)\}$). Dans la suite de ce paragraphe, on montre que cette amélioration est maintenue dans le cas où on utilise les méthodes de glissement fréquentiel

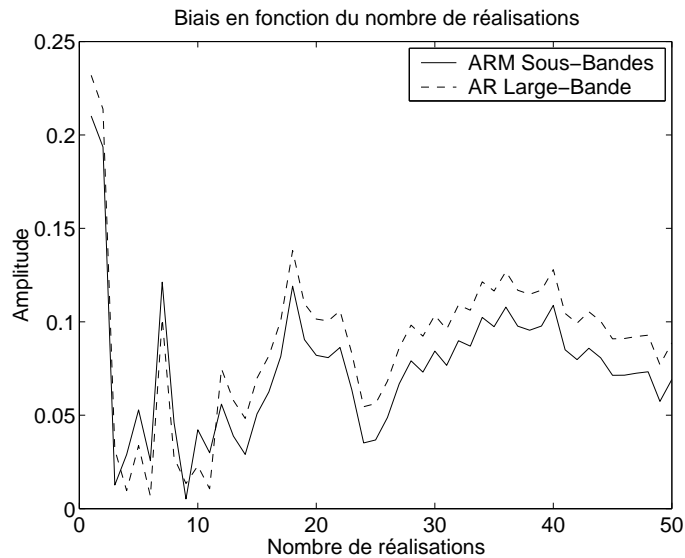


FIG. 4.10 – Biais sur l’estimation du spectre en fonction du nombre de réalisations.

présentées au chapitre 3 et qui permettent d’éliminer le recouvrement spectral.

4.6.1 Recul de la borne de Cramer-Rao et amélioration du conditionnement

L’objectif de ce paragraphe est de montrer le principal intérêt de l’estimation spectrale dans les sous-bandes : la diminution de la variance d’estimation fréquentielle. Ce résultat sera présenté sur un signal synthétique, constitué de “raies pures”. On illustrera aussi l’amélioration du nombre de conditionnement des matrices de corrélation.

Dans le cas d’un signal composé d’une somme de K exponentielles complexes noyées dans du bruit blanc, on peut trouver dans [1], page 415 l’expression exacte de la borne de Cramer-Rao sur la variance de l’estimateur de la fréquence d’une sinusoïde (donné par la fréquence correspondant au maximum de l’estimateur spectral). Dans les simulations présentées ci-dessous, on va mettre en évidence les bénéfices d’une estimation spectrale AR dans les sous-bandes utilisant la méthode de glissement fréquentiel présentée dans le paragraphe 3.2.2 du chapitre 2 par rapport à l’estimation AR “large-bande” effectuée directement à partir des échantillons du signal original

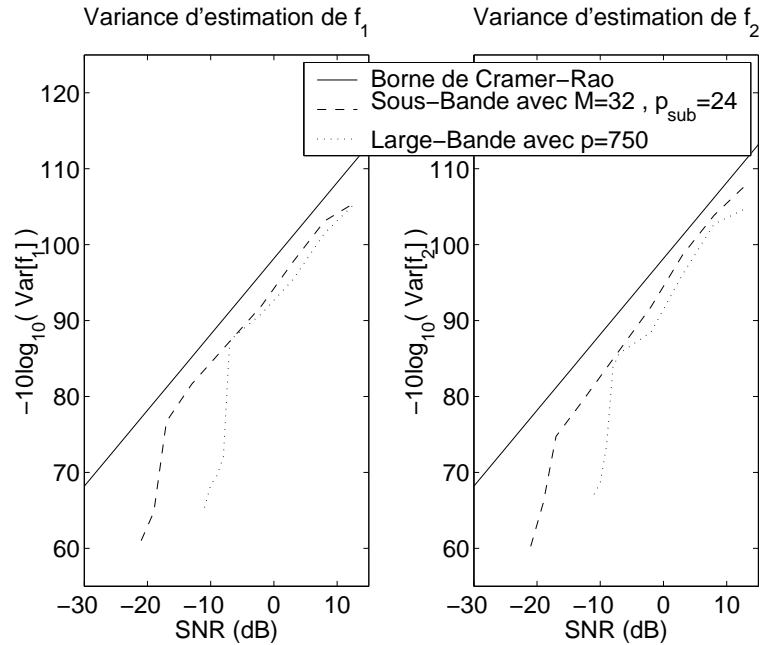
$u(n)$. Ces deux méthodes seront comparées à la borne théorique de Cramer-Rao du point de vue de la variance de l'estimateur fréquentiel. Notons qu'on a choisi d'utiliser la modélisation AR mais qu'on pourrait envisager de comparer de la sorte n'importe quel type de modélisation paramétrique appliquée soit directement soit sur les signaux de sous-bandes tout en continuant d'employer les méthodes de glissement fréquentiel destinées à éliminer le recouvrement spectral au voisinage des frontières des sous-bandes. Ainsi, on considère un signal d'entrée $u(n)$ de la forme :

$$u(n) = A_1 e^{i2\pi f_1 n + \phi_1} + A_2 e^{i2\pi f_2 n + \phi_2} + b(n), n = [0, \dots, N - 1] \quad (4.27)$$

où $b(n)$ est un bruit blanc gaussien centré, de puissance σ_b^2 . Le rapport signal à bruit est $SNR = \frac{A_1^2 + A_2^2}{\sigma_b^2}$ (dans le cas de phases ϕ_1 et ϕ_2 indépendantes uniformément réparties sur $[0, 2\pi]$).

Les simulations ont été menées avec les paramètres suivants : $A_1 = A_2 = 1$, $f_1 = 0.15$, $f_2 = 0.35$ et $N = 1000$. La variance expérimentale de l'estimateur des paramètres f_1 et f_2 est obtenue à partir de 50 réalisations (tirages de Monte-Carlo) pour chaque valeur de SNR . De plus, il est important de noter que, pour une comparaison objective, le ratio "ordre du modèle"/"nombre d'échantillons" est gardé constant pour l'estimation large-bande (sur le signal original) et l'estimation dans les sous-bandes. Par conséquent, si l'ordre de modélisation AR large-bande est $p = 750$, on choisit un ordre $p_{sub} = 24$ dans les sous-bandes avec $M = 32$ sous-bandes, de telle sorte que $p \simeq Mp_{sub}$.

La figure (4.11) trace la variance de l'estimation de chacune de ces fréquences f_1 et f_2 en fonction du SNR , soit dans le cas d'une estimation AR d'ordre 750 effectuée sur le signal original $u(n)$ (traits en petits pointillés), soit dans le cas d'une estimation AR d'ordre 24 effectuée dans la sous-bande correspondante (traits en gros pointillés). En trait plein figure la borne de Cramer-Rao. On met ainsi en évidence l'intérêt de l'estimation spectrale en sous-bande, lorsqu'elle est couplée au banc de filtres-peigne : l'estimation reste proche de la borne de Cramer-Rao jusqu'à des SNR inférieurs de 10 dB au SNR limite à partir duquel la modélisation AR sur le signal original "déchroche". La figure (4.11) montre ainsi les améliorations de l'estimation spectrale dans

FIG. 4.11 – Variance sur l'estimation de f_1 et f_2 en fonction du SNR .

les sous-bandes pour le critère de la variance sur l'estimation de fréquences de “raies pures”.

Afin de bien mettre en évidence l'amélioration, la figure (4.12) montre les 50 réalisations du spectre du modèle autour des fréquences f_1 et f_2 en utilisant le découpage en sous-bandes ou non pour un rapport Signal à Bruit $SNR = -17 \text{ dB}$ (les réalisations des spectres de sous-bandes ont été déplacées vers le haut pour une meilleure lisibilité). Certains pics inattendus apparaissant avec la méthode AR large-bande disparaissent lorsque l'estimation spectrale se fait dans les sous-bandes. Cette figure permet de constater “visuellement” la diminution de la variance d'estimation obtenue en utilisant le découpage en sous-bandes.

Afin de comparer les nombres de conditionnement des matrices d'autocorrélation, on a relevé les résultats à $SNR = 0 \text{ dB}$ sur 50 réalisations en utilisant les mêmes paramètres que ceux utilisés ci-dessus. Lorsqu'on utilise la méthode de glissement fréquentiel, on obtient un signal de sous-bande différent pour chaque fréquence ν et le

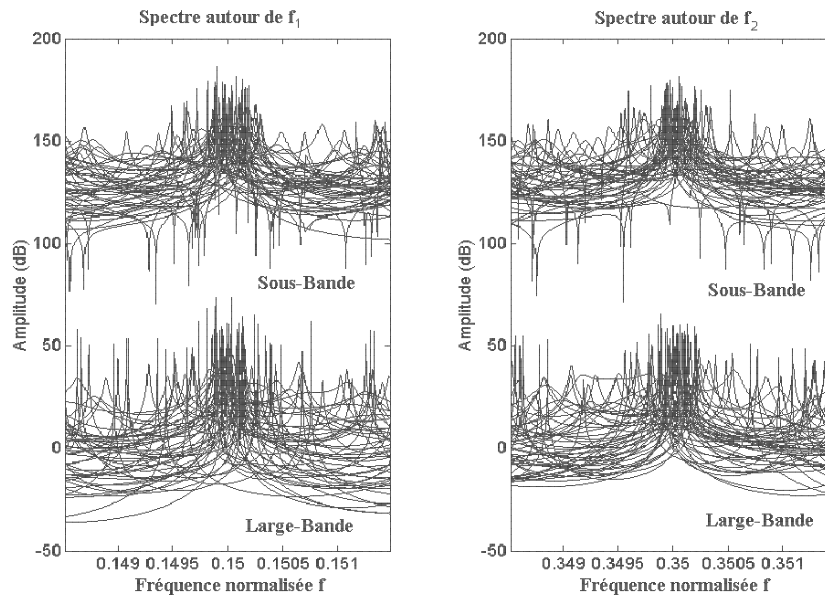


FIG. 4.12 – Spectres large-bande et de sous-bande autour des fréquences f_1 et f_2 pour $SNR = -17dB$.

nombre de conditionnement varie donc en fonction de la fréquence. Ainsi, pour chaque fréquence, le nombre de conditionnement de la matrice d'autocorrélation a été estimé (en calculant les valeurs propres minimale et maximale correspondantes). Dans le cas d'une modélisation globale sur le signal original, une seule matrice d'autocorrélation est utilisée, fournissant donc une unique valeur de nombre de conditionnement. Sur la figure (4.13), les nombres de conditionnement sont tracés en échelle logarithmique.

Un gain de 30 à 70 dB est observé en fonction de la fréquence en faveur de l'estimation spectrale dans les sous-bandes.

4.6.2 Amélioration de la résolution spectrale : cas d'un signal réel

La simulation présentée ici porte sur un signal physique issu d'un accéléromètre placé sur un engrenage au bout du 11^{ème} jour de fonctionnement. Ces signaux ont été fournis par les partenaires industriels de l'opération ASPECT dans le cadre du GDR-PRC ISIS dans lequel s'est impliqué l'IRIT (voir Préface).

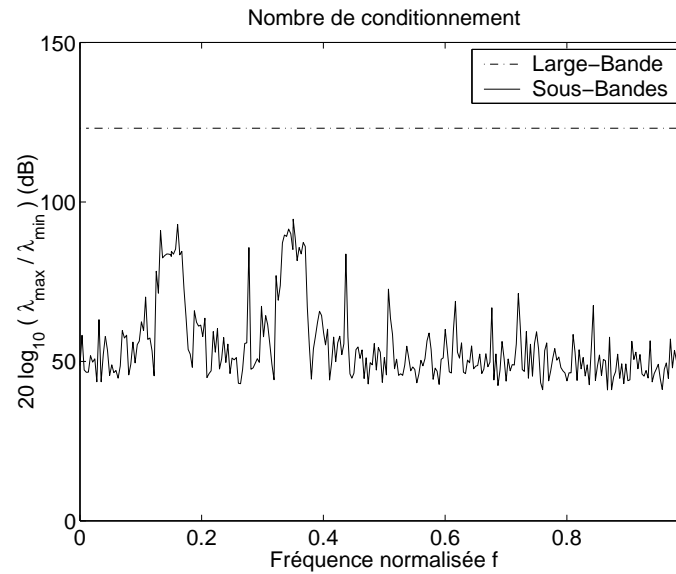


FIG. 4.13 – Nombres de conditionnement des matrices d’autocorrélation large-bande et de sous-bandes.

Une expertise de l’estimation spectrale de ces signaux stationnaires peut permettre de donner des indications sur une éventuelle usure des dents. Les signaux fournis ont la particularité d’être longs et très riches d’un point de vue spectral et c’est pourquoi une démarche naturelle de découpage en sous-bandes s’impose préalablement à l’analyse spectrale.

Dans la simulation présentée ci-dessous, on va comparer l’estimation du spectre de ce signal d’une longueur $N = 3000$ échantillons lorsqu’on utilise la procédure d’estimation spectrale AR dans les sous-bandes utilisant la méthode de glissement fréquentiel par modulation complexe et filtres-peignes et l’estimation AR “large-bande”. Les paramètres choisis sont de $M = 16$ sous-bandes avec un ordre $p_{sub} = 64$ dans chacune des sous-bandes. Pour l’estimation large-bande, on a choisi un ordre $p = Mp_{sub} = 1024$.

Sur la figure (4.14), on peut voir le résultat de l’analyse spectrale de ce signal par les deux méthodes. L’estimateur par les sous-bandes a été volontairement déplacé de 30 dB vers le haut pour une meilleure lisibilité. Toutefois, il est difficile de conclure

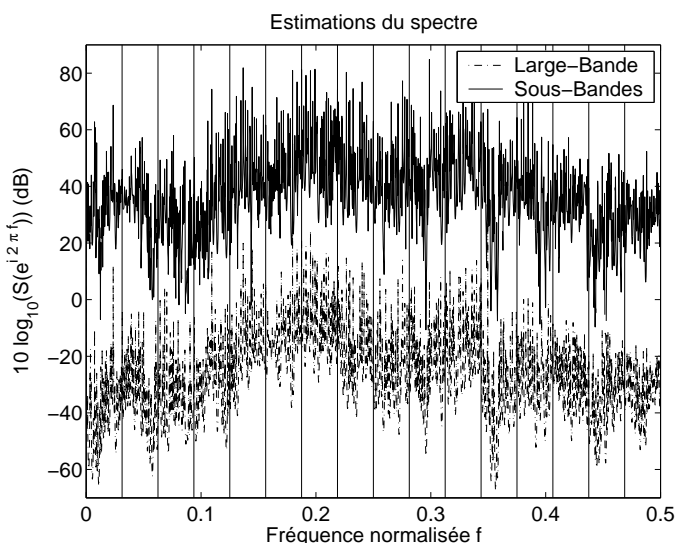


FIG. 4.14 – Spectres de sous-bande et large-bande d'un signal d'engrenage.

sur la qualité de ces deux analyses sur cette figure.

La figure (4.15) présente le résultat d'un zoom autour de la frontière des 5^{ème} et 6^{ème} sous-bandes afin de pouvoir mieux comparer les deux estimateurs. Ces estimations effectuées sur 3000 échantillons sont comparées avec un périodogramme effectué sur un grand nombre d'échantillons (65000 échantillons), ce qui nous permet d'utiliser ce dernier comme référence pour la comparaison. Le spectre large-bande et la référence calculée par transformée de Fourier ont été volontairement décalés de 20 *dB* respectivement vers le haut et vers le bas pour une meilleure lisibilité de la figure.

On constate sur la figure (4.15) que l'estimation dans les sous-bandes permet a priori de détecter plus de pics et avec une meilleure résolution. Des harmoniques apparaissent clairement, en particulier dans la 6^{ème} sous-bande sur cette figure, alors qu'elles étaient difficilement décelables sur l'analyse spectrale "large-bande" correspondante.

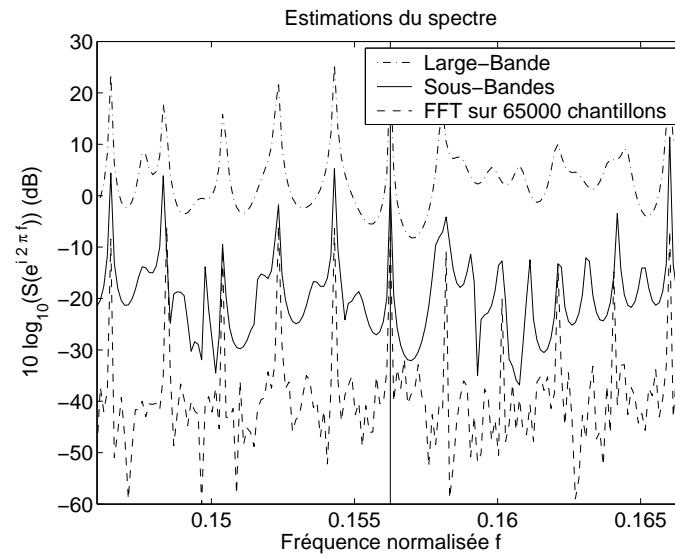


FIG. 4.15 – Zoom autour de la frontière des 5^{ème} et 6^{ème} sous-bandes pour le signal d’engrenage.

Chapitre 5

Conclusion

On a vu dans le chapitre 2 et dans les simulations menées au chapitre 4 que l'utilisation du découpage en sous-bandes pouvait conduire à améliorer les performances de l'estimation spectrale.

Dans ce travail de recherche, on a en particulier proposé deux méthodes destinées à éliminer le recouvrement spectral et les discontinuités provenant de l'analyse spectrale dans les sous-bandes, tout en conservant ses bonnes propriétés qui en procurent les motivations : résolution spectrale linéaire, puissance de l'erreur de prédiction linéaire, blanchiment des densités spectrales de puissance, rapport signal à bruit local et nombre de conditionnement des matrices d'autocorrélation intervenant dans les méthodes d'analyse paramétrique.

On a ensuite proposé deux méthodes de modélisation paramétrique adaptées aux signaux issus des sous-bandes et permettant d'améliorer encore les performances en utilisant l'information fournie par les intercorrélations entre les différentes sous-séries issues de la décimation des signaux filtrés par le banc de filtres. La première, qu'on a appelée *ARDT*, permet d'obtenir autant d'estimateurs spectraux différents que de décalages l considérés. Cette méthode est totalement originale, contrairement à la méthode *ARM* qu'on a proposée comme une autre méthode capable d'utiliser l'information fournie par les intercorrélations entre les différentes sous-séries d'améliorer l'estimation spectrale dans les sous-bandes.

De façon générale, on peut retenir que cette amélioration n'est réellement sensible que dans les cas "extrêmes" (signaux très riches spectralement ou conditions menant à une variance des estimateurs proche de la borne de Cramer-Rao, par exemple). En conclusion générale, on peut dire que si les méthodes de modélisation paramétrique sont intrinsèquement limitées en termes de rapport signal à bruit ou en termes du conditionnement des matrices à inverser lors de l'utilisation de méthodes d'analyse paramétrique, l'utilisation du découpage en sous-bandes permet de repousser un peu plus loin ces limites.

Annexe A

Transformée de Fourier des sous-séries décimées

Soit le signal $x(n)$ décimé d'un facteur M et $y_m(n), m = 0, \dots, M - 1$ les M sous-séries décimées.

Soit $m \in [0, \dots, M - 1]$. La transformée de Fourier de $y_m(n)$ peut s'écrire :

$$x(n) \quad \text{---} \quad \boxed{\downarrow M} \quad \text{---} \quad \begin{cases} y_0(n) \\ y_1(n) \\ \dots \\ y_{M-1}(n) \end{cases}$$

$$Y_m(e^{i2\pi f}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_m(n) e^{-i2\pi f n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(Mn - m) e^{-i2\pi f n}$$

Introduisons le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{Z} &\mapsto D_m \\ n &\rightarrow u(n) = Mn - m \end{aligned}$$

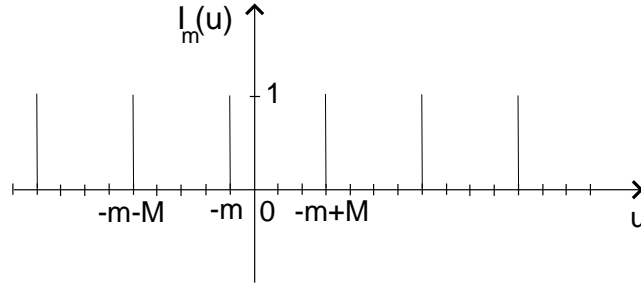
$$\begin{aligned} \text{avec } D_m = &\{q \in \mathbb{Z}, \exists p \in \mathbb{Z} \text{ tq } q = Mp - m\} \\ &\{\dots, -2M - m, -M - m, -m, M - m, 2M - m, \dots\} \end{aligned}$$

On peut aisément montrer que u est bijectif entre \mathbb{Z} et D_m et qu'il constitue donc bien un changement de variables. Alors :

$$Y_m(e^{i2\pi f}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(Mn - m) e^{-i2\pi f n} = \sum_{u \in D_m} x(u) e^{-i2\pi \frac{u+m}{M} f}$$

Définissons la fonction $I_m(u)$ par :

$$I_m(u) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{i2\pi \frac{u+m}{M} k} = \begin{cases} \frac{1-e^{i2\pi(u+m)}}{1-e^{i2\pi \frac{u+m}{M}}} = 0 & \text{si } u \notin D_m \\ 1 & \text{si } u \in D_m \end{cases}$$



On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} Y_m(e^{i2\pi f}) &= \sum_{u \in D_m} x(u) e^{-i2\pi \frac{u+m}{M} f} \\ &= \sum_{u \in \mathbb{Z}} x(u) I_m(u) e^{-i2\pi \frac{u+m}{M} f} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{u=-\infty}^{+\infty} x(u) e^{i2\pi \frac{u+m}{M} k} e^{-i2\pi \frac{u+m}{M} f} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{-i2\pi \frac{f-k}{M} m} \sum_{u=-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-i2\pi \frac{f-k}{M} u} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{-i2\pi \frac{f-k}{M} m} X(e^{i2\pi \frac{f-k}{M}}) \end{aligned}$$

d'où :

$$Y_m(e^{i2\pi f}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{-i2\pi \frac{f-k}{M} m} X(e^{i2\pi \frac{f-k}{M}})$$

Inversement, on peut aussi exprimer les valeurs de la transformée de Fourier de $x(n)$ en $\frac{f-k}{M}$ en fonction des transformées de Fourier des $y_m(n)$ en f . En effet, en écrivant l'équation précédente pour m variant de 0 à $M-1$, on obtient un système de M équations à M inconnues, de déterminant $1 \forall f$. Ce système peut aisément se résoudre sans inversion matricielle en remarquant que :

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{M-1} e^{i2\pi \frac{f-k}{M} m} Y_m(e^{i2\pi f}) &= \frac{1}{M} \sum_{s=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} e^{i2\pi \frac{f-k}{M} m} e^{-i2\pi \frac{f-s}{M} m} X(e^{i2\pi \frac{f-s}{M}}) \\ &= \sum_{s=0}^{M-1} I_{-k}(s) X(e^{i2\pi \frac{f-s}{M}}) \end{aligned}$$

où $I_{-k}(s)$ est la fonction définie précédemment avec :

$$I_{-k}(s) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} e^{i2\pi \frac{s-k}{M} m} = \begin{cases} 1 & \text{si } k - s \text{ est multiple de } M \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et comme $-(M-1) \leq k - s \leq M-1$, le seul terme non nul de la somme sur s est celui pour $s = k$ d'où :

$$\forall k \in \{0, \dots, M-1\}, \boxed{\sum_{m=0}^{M-1} e^{i2\pi \frac{f-k}{M} m} Y_m(e^{i2\pi f}) = X(e^{i2\pi \frac{f-k}{M}})}$$

Annexe B

Autocorrélation par *TFD* et *TFD* inverse

Si on ne fait pas de “zero-padding”, l’algorithme de calcul de l’autocorrélation par TFD et TFD inverse d’un signal $u(n)$ est donné par :

$$\hat{r}_u^{(4)}(k) \stackrel{def}{=} \frac{1}{N^2} \sum_{l=0}^{N-1} \left| \sum_{n=0}^{N-1} u(n) e^{-i2\pi \frac{l}{N} n} \right|^2 e^{i2\pi \frac{l}{N} k}$$

On va montrer de quelle manière on peut exprimer cette grandeur en fonction de l’un ou l’autre des estimateurs classiques d’autocorrélation (biaisé ou non biaisé). Posons :

$$S_u(l) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} u(n) e^{-i2\pi \frac{l}{N} n} \right|^2$$

On a :

$$\begin{aligned} S_u(l) &= \frac{1}{N} \left(\sum_{n=0}^{N-1} u(n) e^{-i2\pi \frac{l}{N} n} \right) \left(\sum_{m=0}^{N-1} u^*(m) e^{i2\pi \frac{l}{N} m} \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} u(n) u^*(m) e^{-i2\pi \frac{l}{N} (n-m)} \end{aligned}$$

On fait le changement de variables d en fonction de m : $d = n - m$:

$$S_u(l) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{d=n}^{n-(N-1)} u(n) u^*(n-d) e^{-i2\pi \frac{l}{N} d}$$

Comme n et m varient entre 0 et $N - 1$, on en déduit que $d \in [-(N - 1), N - 1]$. On

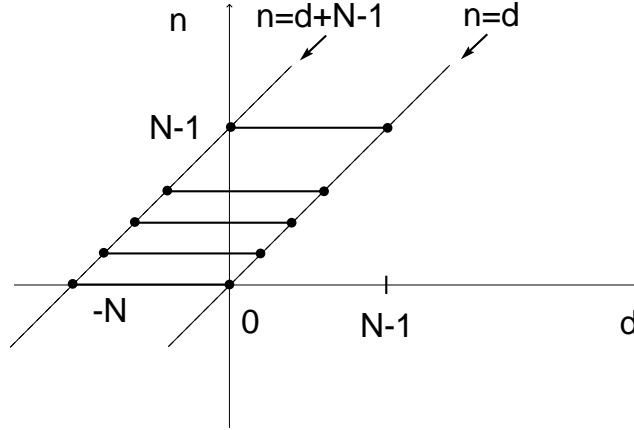


FIG. B.1 – Indices de la double somme.

en déduit que pour une fonction à deux variables $\alpha_{d,n}$ quelconque :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{d=n}^{n-(N-1)} \alpha_{d,n} = \sum_{d=0}^{N-1} \sum_{n=d}^{N-1} \alpha_{d,n} + \sum_{d=-(N-1)}^{-1} \sum_{n=0}^{d+N-1} \alpha_{d,n}$$

En posant $v = -d$ dans la deuxième somme, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{d=n}^{n-(N-1)} \alpha_{d,n} = \sum_{d=0}^{N-1} \sum_{n=d}^{N-1} \alpha_{d,n} + \sum_{v=1}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1-v} \alpha_{-v,n}$$

Si on applique ceci avec $\alpha_{d,n} = u(n)u^*(n-d)e^{-i2\pi\frac{l}{N}d}$, on obtient :

$$\begin{aligned} NS_u(l) &= \sum_{d=0}^{N-1} \sum_{n=d}^{N-1} u(n)u^*(n-d)e^{-i2\pi\frac{l}{N}d} + \sum_{v=1}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1-v} u(n)u^*(n+v)e^{i2\pi\frac{l}{N}v} \\ &= \sum_{d=0}^{N-1} \sum_{n=d}^{N-1} u(n)u^*(n-d)e^{-i2\pi\frac{l}{N}d} + \sum_{v=1}^{N-1} \sum_{m=v}^{N-1} u(m-v)u^*(m)e^{i2\pi\frac{l}{N}v} \\ &= N \sum_{d=0}^{N-1} \hat{r}_u^1(d) e^{-i2\pi\frac{l}{N}d} + N \sum_{v=1}^{N-1} \hat{r}_u^1(v) e^{i2\pi\frac{l}{N}v} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\hat{r}_u^{(4)}(k) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{d=0}^{N-1} \hat{r}_u^1(d) e^{i2\pi\frac{k-d}{N}l} + \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{d=1}^{N-1} \hat{r}_u^1(-d) e^{i2\pi\frac{k+d}{N}l}$$

Posons $I_1(d) = \sum_{l=0}^{N-1} e^{i2\pi \frac{k-d}{N} l}$ et $I_2(d) = \sum_{l=0}^{N-1} e^{i2\pi \frac{k+d}{N} l}$, de sorte que :

$$\hat{r}_u^{(4)}(k) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \hat{r}_u^{(1)}(d) I_1(d) + \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \hat{r}_u^{(1)}(-d) I_2(d)$$

On a :

$$I_1(d) = \sum_{l=0}^{N-1} e^{i2\pi \frac{k-d}{N} l} = \begin{cases} \frac{1-e^{i2\pi(k-d)}}{1-e^{i2\pi \frac{k-d}{N}}} = 0 & \text{si } k-d \text{ n'est pas multiple de } N \\ N & \text{sinon} \end{cases}$$

et comme $-(N-1) \leq k-d \leq N-1$, le seul cas où $k-d$ est multiple de N est le cas $k-d=0$. Pour I_2 , on a de la même manière :

$$I_2(d) = \sum_{l=0}^{N-1} e^{i2\pi \frac{k+d}{N} l} = \begin{cases} \frac{1-e^{i2\pi(k+d)}}{1-e^{i2\pi \frac{k+d}{N}}} = 0 & \text{si } k+d \text{ n'est pas multiple de } N \\ N & \text{sinon} \end{cases}$$

comme $1 \leq k+d \leq 2N-2$, le seul cas où $k+d$ est multiple de N est le cas $k+d=N$. Finalement, on obtient donc :

$$\boxed{\hat{r}_u^{(4)}(k) = \hat{r}_u^{(1)}(k) + \hat{r}_u^{(1)}(k-N)}$$

Pour illustrer ceci, comparons le cas d'un bruit blanc puis le cas d'un signal sinusoïdal bruité pour lesquels on voudrait estimer l'autocorrélation par la méthode de *TFD* et *TFD* inverse, mais sans faire de zero-padding.

Sur les figures B.2 et B.3, on a tracé les estimations de l'autocorrélation par cette méthode, avec et sans zero-padding. A noter que cette dernière a été décalée vers le haut pour une meilleure lisibilité de ces figures. On constate que le terme supplémentaire $\hat{r}_u^{(1)}(k-N)$ peut devenir très gênant, surtout dans le cas de signaux dont l'autocorrélation contient un terme périodique, comme la sinusoïde.

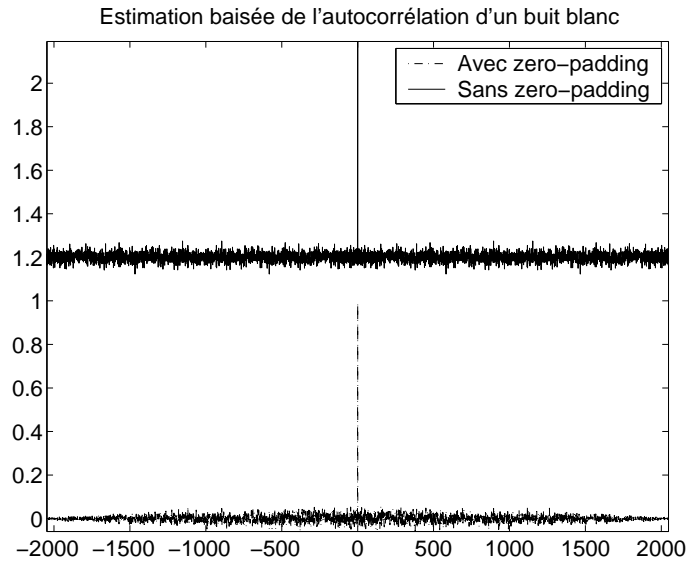


FIG. B.2 – Autocorrélation biaisée pour un bruit blanc.

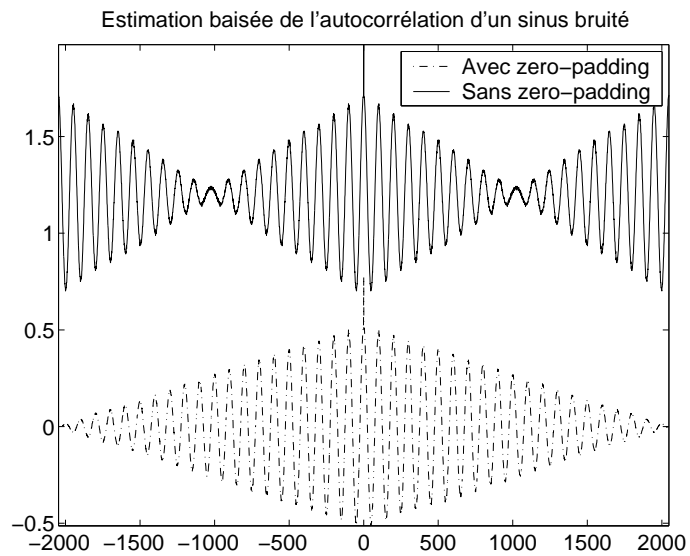


FIG. B.3 – Autocorrélation biaisée pour une sinusoïde bruitée.

Bibliographie

- [1] S. M. Kay, *Modern Spectral Estimation : Theory and Applications*. Englewood Cliffs, New Jersey : Prentice Hall Inc., 1988.
- [2] S. L. J. Marple, *Digital Spectral Analysis With Applications*. Englewood Cliffs, New Jersey : Prentice Hall Inc., 1987.
- [3] P. Flandrin, *Temps-Fréquence*. Paris, France : Hermès Science Publications, 1993.
- [4] F. Hlawatch, F. Auger, and J. P. Ovarlez, *Temps-Fréquence : concepts et outils*. Paris, France : Traité IC2, Hermès Science Publications, à paraître.
- [5] F. Castanié, *Analyse Spectrale*. Paris, France : Traité IC2, Hermès Science Publications, 2003.
- [6] S. Yvetot, *Analyse de Prony multi-modèle de signaux transitoires*. Ph.D. dissertation, INP Toulouse, Toulouse, France, 1996. in French.
- [7] A. Ducasse, *Estimation de sous-harmoniques à l'aide de méthodes paramétriques*. Ph.D. dissertation, INP Toulouse, Toulouse, France, 1997. in French.
- [8] P. Michel, *Estimation en temps réel des modes souples des voilures de grande dimension*. Ph.D. dissertation, INP Toulouse, Toulouse, France, 2003. in French.
- [9] M. Durnerin, N. Martin, C. Mailhes, G. Lejeune, J. Liénard, J. L. Lacoume, F. Castanié, F. P. Prieur, G. Goulet, and A. Silvent, “Cyclostationnarités d’ordre 1 et 2 : application à des signaux vibratoires d’engrenages,” in *Proc. GRETSI-1997*, vol. 1, (Grenoble, France), pp. 323–326, September 1997.
- [10] M. Kendall and A. S. Stuart, *The Advanced Theory of Statistics*, vol. 2. New York : Macmillan, 1979.

- [11] H. L. V. Trees, *Detection, Estimation, and Modulation Theory*, vol. 1. New York : J. Wiley, 1968.
- [12] D. E. Johnston and P. M. Djuric, "An efficient bayes solution to ar signal modeling for short sequences," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 4, pp. 345–348, April 1994.
- [13] M. A. Lagunas and A. I. Perez-Neira, "Spectral subtraction and spectral estimation," in *Proceedings of the Tenth IEEE Workshop on Statistical Signal and Array Processing*, (Pocono Manor, PA, USA), pp. 383–386, August 2000.
- [14] J. Max and J. L. Lacoume, *Méthodes et Techniques de Traitement du Signal et Applications aux mesures Physiques*. Masson, 1996.
- [15] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer, *Digital Signal Processing*. Englewood Cliffs, New Jersey : Prentice Hall Inc., 1975.
- [16] D. M., *Une Stratégie pour l'interprétation en analyse spectrale. Détection et caractérisation des composantes d'un spectre*. Ph.D. dissertation, INP Toulouse, Toulouse, France, 1999. in French.
- [17] A. Ducasse, C. Mailhes, and F. Castanié, "Estimation de fréquences : Panorama des méthodes paramétriques," *Traitement du signal*, vol. 15, pp. 149–162, July 1998.
- [18] J. L. Lacoume and Al., "Close frequency resolution by maximum entropy spectral estimators," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 32, pp. 977–983, October 1984.
- [19] B. Vrcelj, *Multirate Signal Processing Concepts in Digital Communications*. Ph.D. dissertation, California Institute of Technology, Pasadena, California, 2003.
- [20] P. P. Vaidyanathan, *Multirate Systems and Filter Banks*. Englewood Cliffs, New Jersey : Prentice Hall Inc., 1993.
- [21] R. E. Crochiere and L. R. Rabiner, *Multirate Digital Signal Processing*. Prentice Hall Inc., 1983.
- [22] A. S. Sedra and P. O. Brackett, *Filter theory and design, active and passive*. Matrix publishers, Inc., 1978.

- [23] D. Gabor, "Theory of communications," *J. Inst. Elec. Eng., London*, vol. 93, 1946.
- [24] A. Papoulis, *Signal analysis*. New York : McGraw-Hill, 1977.
- [25] J. W. Woods, *Subband image coding*. Boston (MA) : Kluwer, 1994.
- [26] A. Gersho and R. M. Gray, *Vector quantization and signal compression*. Boston (MA) : Kluwer, 1992.
- [27] S. Rao and W. A. Pearlman, "Analysis of linear prediction, coding, and spectral estimation from subbands," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 42, pp. 1160–1178, July 1996.
- [28] A. Tkacenko and P. P. Vaidyanathan, "Sinusoidal frequency estimation using filter banks," in *Proc. IEEE ICASSP-01*, (Salt Lake City, Utah), pp. 825–828, May 2001.
- [29] P. Stoïca, B. Friedlander, and T. Söderström, "An approximate maximum likelihood approach to arma spectral estimation," *Inter. Journal of Control*, vol. 45, pp. 1281–1310, 1987.
- [30] G. H. Golub and C. F. Van-Loan, *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, 1989.
- [31] U. Grenander and G. Szegő, *Toeplitz Forms and Their Applications*. Berkeley : University of California Press, 1958.
- [32] A. Tkacenko and P. P. Vaidyanathan, "The role of filter banks in sinusoidal frequency estimation," *J. Franklin Inst.*, vol. 338, pp. 517–547, August 2001.
- [33] E. B. Hogenauer, "An economical class of digital filters for decimation and interpolation," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 29, pp. 155–162, April 1981.
- [34] A. Papoulis, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. New York : McGraw-Hill, 1991.
- [35] N. S. Jayant and P. Noll, *Digital Coding Of Waveforms*. Englewood Cliffs, New Jersey : Prentice Hall Inc., 1984.

- [36] G. Evangelista and S. Cavaliere, "Frequency-warped filter banks and wavelet transforms : a discrete-time approach via Laguerre expansion," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 46, pp. 2638–2650, October 1998.
- [37] D. Bonacci, P. Michel, and C. Mailhes, "Subband decomposition and frequency warping for spectral estimation," in *Proc. IEEE EUSIPCO-2002*, (Toulouse, France), pp. 147–150, September 2002.
- [38] D. Bonacci, C. Mailhes, and P. M. Djuric, "Improving frequency resolution for correlation-based spectral estimation methods using subband decomposition," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 6, pp. 329–332, April 2003.
- [39] D. Bonacci and C. Mailhes, "Estimation spectrale par découpage en sous-bandes d'un signal modulé," in *Actes du colloque de l'EDIT*, (Toulouse, France), pp. 65–69, April 2002.
- [40] A. Yeredor, "The extended least squares criterion : Minimization algorithms and applications," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 49, pp. 74–86, January 2001.
- [41] H. K. S. Mallat, D. Donoho, and A. S. Willsky, "Best basis algorithm for signal enhancement," in *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 3, pp. 1561–1564, May 1995.
- [42] R. A. Wiggins and E. A. Robinson, "Recursive solution to the multichannel filtering problem," *J. Geophys. Res.*, vol. 70, pp. 1885–1891, 1965.
- [43] M. Wax and T. Kailath, "Efficient inversion of doubly block toeplitz matrix," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 8, pp. 170–173, April 1983.
- [44] M. Gharbi and N. Martin, "Filtrage autoregressif vectoriel," in *Proc. GRETSI-1983*, vol. 2, (Nice, France), pp. 971–976, May 1983.